

---

# 携帯端末用 SAW フィルタの関数論的 回路構成に関する研究

---

16560339

平成 16 年度～18 年度科学研究費補助金  
(基盤研究 (C)) 研究成果報告書

平成 19 年 3 月

研究代表者 西 哲生  
早稲田大学 理工学術院 教授

## はしがき

本研究では、携帯端末用の入出力部にある**アンテナ分波器** (Duplexer) の主要要素である**表面弾性波フィルタ** (Surface Acoustic Wave Filter; SAW フィルタ) に関して、関数論的・回路網構成論的な新しい設計法を開発することにある。研究期間としては平成 16 年～18 年の 3 年である。

SAW 素子は 800 程度の高い  $Q$  をもつ電気音響変換素子であり、これを用いると 800MHz 帯のフィルタが数ミリ角で実現できることから、最近の携帯端末では SAW フィルタが専ら使われており、今後の高性能化のためには、新しい設計手法が強く求められている。特に、アンテナ分波器の仕様として、急峻な減衰特性をもち隣接した通過帯域をもつ対をなす二つのフィルタを実現する必要がある。

所望のフィルタは、800MHz 帯で広帯域の通過域をもち、かつ非常に急峻な減衰特性を実現する必要がある。本研究課題において研究対象とする SAW フィルタの回路形としては、1) 従来用いられているはしご形回路で並列枝に SAW 素子のみまたは SAW 素子の直列回路を用いたもの、2) SAW 素子の直並列回路に集中定数素子のインダクタンス  $L$  を挿入した混在形回路、の二通りの回路を研究対象とした。上記 1) の回路により複数の実減衰極も実現できる可能性があり、また 2) の回路の場合も新しい減衰極を実現できる可能性があり、特性の改善が見込めるとの予想の下に、解析的検討を行った。

研究成果は本冊子に綴じているが、主な結果を挙げると次の 3 点である。

1. SAW はしご形回路で並列枝に SAW 素子のみまたは SAW 素子の直列回路をに対して、インピーダンス変換を行うことで従来の集中定数  $LC$  回路の設計に帰着し、古典的回路構成の手法が適用でき、この場合の**チェビシェフ近似法**を提案した (本冊子の目次の 1 の文献参照)。本研究課題の特徴の一つはこの点に着目したことにある。ただし、上記の変換により両終端インピーダンスが複雑な形になることで困難性は残る。
2. 上記の両終端インピーダンスが複雑な形になる困難性に関して、動作伝送係数に基づく回路理論的な詳細の検討を行った (本冊子の目次の 8 の文献参照)。
3. SAW 素子の直並列回路に集中定数素子のインダクタンス  $L$  を挿入した**混在形回路**について、回路を**対称形**の限定することにより 2 等分定理を利用した解析的検討が可能となり、この場合に対して  $L$  を挿入することによる**減衰極の値と  $L$  の値との関係**、減衰特性の改善について解析的な検討を行うと共に、数値シミュレーションで確認を行った (本冊子の目次の 4 の文献参照)。

研究組織

研究代表者 : 西 哲生 (早稲田大学理工学術院教授)  
研究分担者 : 高橋 規一 (九州大学システム情報科学研究所助教授)(H16 のみ)  
研究分担者 : 緒方 将人 ((九州産業大学工学部講師)  
(研究協力者 : 駒崎友和)

交付決定額 (配分額)

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合 計
平成 16 年度	1,200,000	0	1,200,000
平成 17 年度	1,100,000	0	1,100,000
平成 18 年度	1,200,000	0	1,200,000
総 計	3,500,000	0	3,500,000

## 研究発表

### (1) 学会誌等

1. Tetsuo Nishi, Masato Ogata, “Simultaneous Realization of  $z_{21}/z_{11}$  and  $y_{21}$  of an RC Two-port”, Proc. 2004 IEEE Int. Sympo. on Circuits and Systems(ISCAS2004), pp. I-277 - I-280, May, 2004.
2. Masato Ogata, Tetsuo Nishi, “Simple RC Models of Distributed RC Lines in Consideration with the Delay Time”, Proc. 2004 IEEE Int. Sympo. on Circuits and Systems(ISCAS2004), pp. IV-649 - IV-652, May, 2004.
3. Norikazu Takahashi, Tetsuo Nishi, “Global Convergence Analysis of Decomposition Methods for Support Vector Machines”, Proc. 2004 IEEE Int. Sympo. on Circuits and Systems(ISCAS2004), pp. V-728 - V-731, May, 2004.
4. Hajime Hara, Tetsuo Nishi and Norikazu Takahashi, “Necessary and Sufficient Conditions for 2-Dimensional Discrete-Time Systems Described by the Signum Function to be Stable”, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, vol.E87-A, no.6, pp.1500–1502, June, 2004.
5. Tetsuo Nishi, Hajime Hara and Norikazu Takahashi, “Necessary and sufficient conditions for one-dimensional discrete-time binary cellular neural network to be stable”, Proc. of the 8th IEEE Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications(CNNA 2004), July, 2004.
6. Hajime HARA, Tetsuo NISHI, Norikazu TAKAHASHI, “Realization of Limit Cycles with Length 8 or 4 by Three-Dimensional Binary State Equations”, Proc. of the 2004 International Technical Conference on Circuits, Systems, Computers and Communications(ITC-CSCC2004), July, 2004.
7. Hajime Hara, Norikazu Takahashi, Tetsuo Nishi, “Necessary and sufficient conditions for one-dimensional discrete-time binary cellular neural network with non-symmetric connections to be stable”, Proc. of 2004 IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS 2004), pp.I-389 - I-392, July, 2004.
8. Masato OGATA, Tetsuo NISHI, “Simple approximation models for coupled RC lines with application to delay and crosstalk estimation”, Proc. of 2004 IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS 2004), pp.I-409 - I-412, July, 2004.
9. Makoto Nagayoshi, Norikazu Takahashi, Tetsuo Nishi, “On Stable Patterns Realized by a Class of One-Dimensional Two-Layer CNNs”, Proc. of 2004 IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS 2004), pp. I-385 - I-388, July, 2004.



10. Guo Jun, Norikazu Takahashi, Tetsuo Nishi, "A Learning Method for Robust Support Vector Machines", ISNN2004(2004 IEEE Sympo. on Neural Networks) Lecture Notes in Computer Science (LNCS), pp.474-479, Aug. 2004.
11. Masato Ogata and Tetsuo Nishi, "Graph-theoretical approach to 2-switch DC-DC converters", Int. Journal on Circuit Theory and Applications, vol.33, no. 2, pp.161-173, Mar. 2005.
12. Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "Rigorous Proof of Termination of SMO Algorithm for Support Vector Machines", IEEE Transactions on Neural Networks, vol.16, no.3, pp.774-776, May 2005.
13. Jun Guo and Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "A Learning Algorithm for Enhancing the Generalization Ability of Support Vector Machines", Proc. of 2005 IEEE Int. Sympo. on Circuits and Systems, pp. 3631-3634, May 2005.
14. Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "On Complete Stability of Three-Cell CNNs with Opposite-Sign Templates", Proc. of 2005 IEEE Int. Sympo. on Circuits and Systems, pp. 4673-4674, May 2005.
15. Masato Ogata, Tetsuo Nishi, "Graph-theoretic approach to the design of four-switch DC-DC converters", Proc. 2005 IEEE Int. Sympo. on Circuits and Systems(ISCAS2005), pp. 768-771, May, 2005.
16. Jun Guo and Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "A Learning Algorithm for Improving the Classification Speed of Support Vector Machines", Proc. of 2005 European Conf. on Circuit Theory and Design, Aug/Sept, 2005.
17. Norikazu Takahashi and Tsuyoshi Yamakawa and Tetsuo Nishi, "Realization of Limit Cycles by Neural Networks with Piecewise Linear Activation Function", Proc. of 2005 European Conf. on Circuit Theory and Design, Aug/Sept 2005.
18. Tetsuo NISHI and Masato OGATA, "ANALYSIS OF DC-DC CONVERTERS CONTAINING A TRANSFORMER", Proceedings of 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS2006), pp.3798-3801, May 2006.
19. Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "A Sufficient Condition for 1-D CNNs with Antisymmetric Templates to Perform Connected Component Detection," Proceedings of 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS2006), pp.2169-2172, May 2006.
20. Jun Guo, Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "Convergence Proof of a Sequential Minimal Optimization Algorithm for Support Vector Regression," Proceedings of 2006 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN2006), pp.747-754, July 2006.
21. Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "Necessary and Sufficient Condition for a Class of Planar Dynamical Systems Related to CNNs to be Completely Stable,"

IEEE Transactions on Circuits and Systems - II, vol.53, no.8, pp.727-733, August 2006.

22. Hajime Hara, Tetsuo Nishi and Norikazu Takahashi, "Study on the Number of Equilibrium Points for a 1-D DBCNN with No Input," Proceedings of 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2006), pp.727-730, September 2006.
23. Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "Further Analysis on Condition for 1-D CNNs to Perform Connected Component Detection," Proceedings of 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2006), pp.735-738, September 2006.
24. Jun Guo, Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "A Novel Sequential Minimal Optimization Algorithm for Support Vector Regression," Proceedings of the 13th International Conference on Neural Information Processing (ICONIP2006), pp.827-836, October 2006.
25. Tetsuo Nishi, Hajime Hara and Norikazu Takahashi, "Necessary and Sufficient Conditions for a 1-D DBCNN with an Input to Be Stable in terms of Connection Coefficients," IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, vol.E89-A, no.10, pp.2825-2832, October 2006.
26. Jun Guo, Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "An Efficient Method for Simplifying Decision Functions of Support Vector Machines," IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, vol.E89-A, no.10, pp.2795-2802, October 2006.
27. Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "Global Convergence of Decomposition Learning Methods for Support Vector Machines," IEEE Transactions on Neural Networks, vol.17, no.6, pp.1362-1369, November 2006.
28. Tetsuo Nishi, Norikazu Takahashi and Hajime Hara, "Necessary and Sufficient Conditions for One-Dimensional Discrete-Time Autonomous Binary Cellular Neural Networks to Be Stable," IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, vol.E89-A, no.12, pp.3693-3698, December 2006.

## (2) 口頭発表

1. 西 哲生, 松田 圭太, 駒崎 友和, "SAW フィルタの設計に関連したチェビシェフ特性近似", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Jan. 2005.
2. 緒方 将人, 西 哲生, "スイッチを4個含むDC-DCコンバータの回路構造条件に関する一検討", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Jan. 2005.
3. 高橋 規一, 西 哲生, "3個のセルから成るCNNの完全安定性に関する一考察", 電子情報通信学会2005年総合大会, Mar. 2005.

4. Jun Guo, Norikazu Takahashi, Tetsuo Nishi, "Reducing the Number of Non-zero Coefficients in the Decision Function of an SVM", 電子情報通信学会 2005 年総合大会, Mar. 2005.
5. 川畑 進, 高橋 規一, 西 哲生, "ロバスト性を考慮した 1 次元 2 層 CNN のテンプレート最適化", 電気関係学会九州支部連合大会, Sept. 2005.
6. 成瀬 俊宏, 緒方 将人, 高橋 規一, 西 哲生, "状態平均方程式の定常解に関する一検討", 電気関係学会九州支部連合大会, Sept. 2005.
7. 西 哲生, 緒方将人, "変成器を含む DC-DC コンバータの回路構造条件について", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Nov. 2005.
8. 緒方 将人, 西 哲生, "接続情報に基づく DC-DC コンバータ回路の構成法", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Mar. 2006.
9. 緒方 将人, 西 哲生, "CIP 法による無損失線路のシミュレーション", 電気関係学会九州支部連合大会, Sept. 2006.
10. 西 哲生, 駒崎友和, "SAW 素子とインダクタンスからなる対称形 SAW フィルタの集中定数回路モデルを用いる一設計法", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Jan. 2007.
11. 緒方 将人, 西 哲生, "スイッチ方式コンバータにおける平均電力のグラフ理論的解析", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Jan. 2007.

### (3) 著書

1. 電子情報通信学会「技術と歴史」研究会編 (分担執筆), "電子情報通信技術史", コロナ社, 2006.

## 研究成果による工業所有権の出願・取得状況

なし

## 成果報告

### 成果報告の内容 (目次)

1. 西 哲生, 松田 圭太, 駒崎 友和, "SAW フィルタの設計に関連したチェビシェフ特性近似", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Jan. 2005.
2. 緒方 将人, 西 哲生, "スイッチを4個含むDC-DCコンバータの回路構造条件に関する一検討", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Jan. 2005.
3. 西 哲生, 緒方将人, "変成器を含むDC-DCコンバータの回路構造条件について", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Nov. 2005.
4. 西 哲生, 駒崎友和, "SAW素子とインダクタンスからなる対称形SAWフィルタの集中定数回路モデルを用いる一設計法", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Jan. 2007.
5. 同上のプレゼンテーション用資料
6. 緒方 将人, 西 哲生, "スイッチ方式コンバータにおける平均電力のグラフ理論的解析", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Jan. 2007.
7. 緒方 将人, 西 哲生, "接続情報に基づくDC-DCコンバータ回路の構成法", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, Mar. 2006.
8. 西 哲生, "SAWフィルタの設計理論", (近日電子情報通信学会回路とシステム研究会において発表予定原稿).
9. Tetsuo Nishi, Masato Ogata, "Simultaneous Realization of  $z_{21}/z_{11}$  and  $y_{21}$  of an RC Two-port", Proc. 2004 IEEE Int. Sympo. on Circuits and Systems(ISCAS2004), pp. I-277 - I-280, May, 2004.
10. Masato Ogata, Tetsuo Nishi, "Simple RC Models of Distributed RC Lines in Consideration with the Delay Time", Proc. 2004 IEEE Int. Sympo. on Circuits and Systems(ISCAS2004), pp. IV-649 - IV-652, May, 2004.
11. Masato Ogata and Tetsuo Nishi, "Graph-theoretical approach to 2-switch DC-DC converters", Int. Journal on Circuit Theory and Applications, vol.33, no. 2, pp.161-173, Mar. 2005.
12. Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "On Complete Stability of Three-Cell CNNs with Opposite-Sign Templates", Proc. of 2005 IEEE Int. Sympo. on Circuits and Systems, pp. 4673-4674, May 2005.
13. Masato Ogata, Tetsuo Nishi, "Graph-theoretic approach to the design of four-switch DC-DC converters", Proc. 2005 IEEE Int. Sympo. on Circuits and Systems(ISCAS2005), pp. 768-771, May, 2005.

14. Tetsuo NISHI and Masato OGATA, "ANALYSIS OF DC-DC CONVERTERS CONTAINING A TRANSFORMER", Proceedings of 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS2006), pp.3798-3801, May 2006.
15. Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "Necessary and Sufficient Condition for a Class of Planar Dynamical Systems Related to CNNs to be Completely Stable," IEEE Transactions on Circuits and Systems - II, vol.53, no.8, pp.727-733, August 2006.
16. Tetsuo Nishi, Hajime Hara and Norikazu Takahashi, "Necessary and Sufficient Conditions for a 1-D DBCNN with an Input to Be Stable in terms of Connection Coefficients," IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, vol.E89-A, no.10, pp.2825-2832, October 2006.
17. Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, "Global Convergence of Decomposition Learning Methods for Support Vector Machines," IEEE Transactions on Neural Networks, vol.17, no.6, pp.1362-1369, November 2006.
18. Tetsuo Nishi, Norikazu Takahashi and Hajime Hara, "Necessary and Sufficient Conditions for One-Dimensional Discrete-Time Autonomous Binary Cellular Neural Networks to Be Stable," IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, vol.E89-A, no.12, pp.3693-3698, December 2006.

## SAW フィルタの設計に関連したチェビシェフ特性近似

西 哲生<sup>†</sup> 松田 圭太<sup>††</sup> 駒崎 友和<sup>†††</sup>

<sup>†</sup> 九州大学大学院システム情報科学情報工学部門 〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

<sup>††</sup> 九州大学大学院システム情報科学府情報工学専攻 〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

<sup>†††</sup> 駒崎回路研究所 〒350-0015 川越市今泉 86-23

E-mail: <sup>†</sup>nishi@csce.kyushu-u.ac.jp, <sup>††</sup>keita@kairo.csce.kyushu-u.ac.jp, <sup>†††</sup>tomoka@wonder.ocn.ne.jp

あらまし 典型的な SAW フィルタの一つであるはしご形 SAW フィルタの振幅特性の実験問題は、分母が 2 次偶多項式で低域特性をもつ偶有理関数の設計問題になる。本稿では、この偶有理関数がチェビシェフ（ミニマックス）形低域通過フィルタ特性となるための関数の導出法を述べる。得られた関数は変数変換により帯域フィルタ特性に変換される。

キーワード SAW フィルタ, チェビシェフ形フィルタ

## Chebyshev Approximation Associated with the Design of SAW Filters

Tetsuo NISHI <sup>†</sup>, Keita MATSUDA<sup>††</sup>, and Tomokazu KOMAZAKI<sup>†††</sup>

<sup>†</sup> Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University  
Hakozaki 6-10-1, Higashi-ku, Fukuoka, 812-8581 Japan

<sup>††</sup> Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University  
Hakozaki 6-10-1, Higashi-ku, Fukuoka, 812-8581 Japan

<sup>†††</sup> Komazaki Laboratory Imaizumi 86-23, Kawagoe, 350-0015 Japan

E-mail: <sup>†</sup>nishi@csce.kyushu-u.ac.jp, <sup>††</sup>keita@kairo.csce.kyushu-u.ac.jp, <sup>†††</sup>tomoka@wonder.ocn.ne.jp

**Abstract** One of typical realizations of SAW filters is of ladder type. The realization problem of SAW filters leads the design of a rational transfer function with the denominator of degree two. This paper gives a method to determine such functions having Chebyshev characteristics.

**Key words** SAW filter, Chebyshev filter

### 1. はじめに

携帯電話の小形・軽量化が進んでいるが、これは、アンテナからの送受信信号を分離するアンテナ分波器 (Duplexer) の小形・軽量化の寄与が大きい。アンテナ分波器は従来は誘電体フィルタが用いられていたが、最近では SAW (弾性表面波; Surface Acoustic Wave) フィルタが専ら用いられつつある。

アンテナ分波器は、周波数帯域の少し異なる送信信号と受信信号を分離する“対をなす二つの帯域フィルタ”からなる。各フィルタは比較的広い通過帯域を持ち、それぞれの通過帯域での減衰及びリプルが小さく、かつ他方の信号帯域で減衰量が大きいことが必要で、このため急峻な遮断周波数特性が要求される。SAW 素子は高い  $Q$  を有し非常に小形に出来るため、SAW フィルタは上記の特性の実現に向いており、今後の携帯電話の高周波化に対しても有望視されている。また製造には半導体製造と同じ方法技術が利用できるという点でも高性能化及び大量生産

に向いているといえる。

典型的な SAW フィルタの一つであるはしご形 SAW フィルタの振幅特性の実現問題は、分母に 2 次偶多項式を持ち低域通過特性をもつ偶有理関数の設計問題となる。本研究では、この振幅特性がチェビシェフ（ミニマックス）形低域通過フィルタとなる関数の導出法を述べる。またそれをもとに簡単な数値実験をおこなった。

### 2. SAW フィルタの振幅特性

#### 2.1 SAW フィルタ

SAW フィルタの典型的な構造の一つは、SAW 素子 (SAW 共振器) をはしご形に配置した図 1 の形のものである。ここで図中の素子 (図 2(a) で表されたもの) は図 2(b) の等価回路をもち、鋭い共振特性  $Q$  をもつ共振器である。本稿では簡単のため、図 2(b) の抵抗は無視して考える。図 1 では直列腕にはインピーダンス  $a_i Z_s (i = 1, 3, 5; a_i > 0)$  を配置し、並列腕にはイ

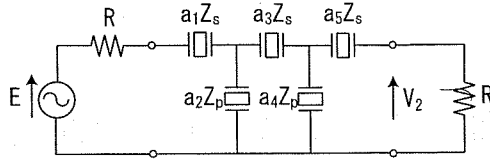


図1 はしご形 SAW フィルタ

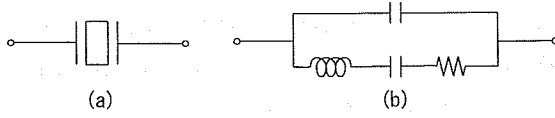


図2 等価回路

インピーダンス  $a_i Z_p (i = 2, 4; a_i > 0)$  を配置するものとし,  $Z_s$ ,  $Z_p$  は共振周波数のわずかに異なる SAW 共振特性のインピーダンスとする. 具体的に  $Z_s$ ,  $Z_p$  は次のように書ける.

$$Z_s = k_s \frac{s^2 + \omega_{s1}^2}{s(s^2 + \omega_{s2}^2)} \quad (1)$$

$$Z_p = k_p \frac{s^2 + \omega_{p1}^2}{s(s^2 + \omega_{p2}^2)} \quad (2)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} k_s, k_p &> 0 \\ 0 < \omega_{s1} < \omega_{s2} < \infty \\ 0 < \omega_{p1} < \omega_{p2} < \infty \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

以下では次の仮定をする.

$$\omega_{s1} = \omega_{p2} (\equiv \omega_0) \quad (4)$$

この結果,  $\omega_0$  は通過域中の減衰量 0 の周波数,  $\omega_{p1}$  は通過域より低い減衰極,  $\omega_{s2}$  は通過域より上の減衰極となる. したがって, 図 1 の回路の振幅特性は大まかには図 3 のようになる.

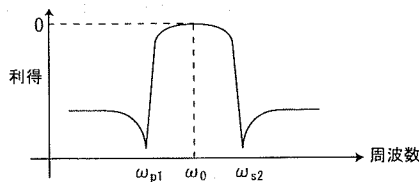


図3 周波数特性

図 1 のすべてのインピーダンスを

$$Z_0 = \sqrt{Z_s Z_p} \quad (5)$$

で割り,

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{Z_s}{Z_p}} \quad (6)$$

とおくと, 図 1 から図 4 の回路が得られる. 図 4 の回路中の各電圧は図 1 の回路中の対応する各電圧に等しいので, 図 1 と図 4 の  $V_2$  は等しい.

ここで簡単のため, 図 4 の終端インピーダンスを  $z$  とする. すなわち,

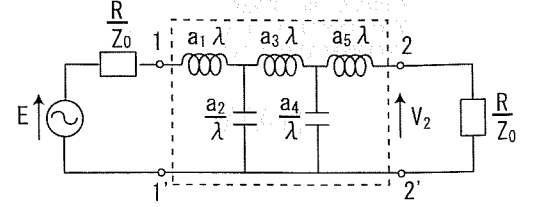


図4 図1の回路のインピーダンス変換後の回路

$$z \equiv \frac{R}{Z_0} = \frac{R}{\sqrt{Z_s Z_p}} \quad (7)$$

とおく. さらに, 一般性を失うことなく

$$k_s = k_p = 1 \quad (8)$$

$$\alpha \equiv \omega_{p1}^2, \quad \beta \equiv \omega_{s2}^2, \quad \gamma \equiv \omega_0^2 (= \omega_{s1}^2 = \omega_{p2}^2) \quad (9)$$

とおく. したがって, 式 (6) は

$$\lambda = \frac{s^2 + \gamma}{\sqrt{(s^2 + \alpha)(s^2 + \beta)}} \quad (10)$$

となる. さらに

$$\alpha\beta = \gamma^2 \quad (11)$$

と仮定する.

## 2.2 伝達関数

図 4 の点線で囲んだリアクタンス 2 ポートの基準抵抗  $1 \Omega$  に対する S 行列  $S(\lambda)$  は, 次の標準形に書ける.

$$S(\lambda) = \frac{1}{g(\lambda)} \begin{bmatrix} h(\lambda) & f(\lambda) \\ f(\lambda) & \mp h(-\lambda) \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで一般に,

- 1)  $g(\lambda)$  は Hurwitz 多項式
- 2)  $g(\lambda)g(-\lambda) = f(\lambda)f(-\lambda) + h(\lambda)h(-\lambda)$
- 3)  $f(\lambda)$  は  $\lambda$  の偶または奇の多項式
- 4) 式 (12) の (2, 2) 要素の複号は  $f$  の偶奇により上下を取るであるが, 図 4 のはしご形回路の場合には特に

$$f(\lambda) = 1 \quad (13)$$

である. ただし後の議論のこともあるので,  $f(\lambda)$  はそのまましておく.

図 4 の終端インピーダンス  $z$  の場合の図 4 全体の動作伝送数  $T$  は

$$T = \frac{(g_o + h_o) + 2g_e z + (g_o - h_o)z^2}{2fz} \quad (14)$$

となる. ここで,  $g_e, g_o (h_e, h_o)$  は  $g(\lambda) (h(\lambda))$  の偶部及び奇を表す.

通過域 ( $\omega_{p1} \leq \omega \leq \omega_{s2}$ ) では  $\lambda$  は純虚数であり, この帯域の振幅特性は, 式 (13) のもとで次のように求まる.

$$T(\lambda)T(-\lambda) = \frac{1}{4f^2} \left[ 4g_e^2 + \frac{\lambda^2}{\alpha(\lambda^2 - 1)} \times \left\{ \left( \frac{Q_1}{R} + RQ_2 \right) \tilde{g}_o + \left( \frac{Q_1}{R} - RQ_2 \right) \tilde{h}_o \right\}^2 \right] \quad (15)$$

$$Q_1(\lambda) = \frac{\alpha [-(\alpha + \gamma)\lambda^2 + 2\gamma \pm \sqrt{D_0}]}{2\gamma^2} \quad (16)$$

$$Q_2(\lambda) = \frac{-(\alpha + \gamma)\lambda^2 + 2\gamma \mp \sqrt{D_0}}{2} \quad (17)$$

$$D_0 = (\alpha + \gamma)^2 \lambda^4 - 4\alpha\gamma\lambda^2 \quad (18)$$

### 3. チェビシエフ特性の実現

#### 3.1 チェビシエフ特性のための微分方程式の導出

式 (15)-(18) はたいへん複雑であるが、式 (13) のもとで詳細に調べると、

$$\lambda = j\Omega \quad (19)$$

に対し

$$T(j\Omega)T(-j\Omega) = |T(j\Omega)|^2 = 1 + \frac{P(\Omega^2)}{\Omega^2 + 1} \quad (20)$$

ただし、SAW 素子の個数を  $n$  とすると、

$$\deg P(x) = n + 2, \quad P(0) = 0 \quad (21)$$

式 (19), (10) より、 $\Omega = 0$  は  $\omega = \omega_0$  に対応する。この条件より具体的に  $P$  は  $\Omega$  の  $2(n+2)$  次の偶多項式で

$$P(\Omega^2) = \Omega^{2m} P_1(\Omega^2) \quad (22)$$

$$P_1(\Omega^2) = a_0 + a_1 \Omega^2 + a_2 \Omega^4 + \cdots + a_{n+2-m} \Omega^{2(n+2-m)} \quad (23)$$

とおける。 $T$  は図 1 の回路全体の動作伝送係数であるから、 $|T(j\Omega)|^2 \geq 1$ 、すなわち

$$P(\Omega^2) \geq 0 \quad (24)$$

さらに次のように  $y$  をおく。

$$y(\Omega) \equiv \frac{P(\Omega^2)}{\Omega^2 + 1} \quad (25)$$

本稿の目的は、 $y(\Omega)$  が図 5 のようなチェビシエフ特性となるように  $P(\Omega^2)$  を定めることが出来ることを示すことである。もちろん図 5 の山や谷の個数は次数により異なり、 $\Omega_i$  は今から決めようとする値である。

図 5 のように、 $y$  は  $-\Omega_c \leq \Omega \leq \Omega_c$  で  $0 \leq y \leq \epsilon$  で等リップル振動をするとし、 $\Omega_i (i = 1, 2, \dots)$  は図 5 のように取とする。また  $|\Omega| \geq \Omega_c$  では  $y$  は単調関数とする。このとき、図 5 より次のことが分かる。1)  $y$  に  $\Omega$  に  $2m$  位の零点、 $\Omega = \pm\Omega_2$ ,

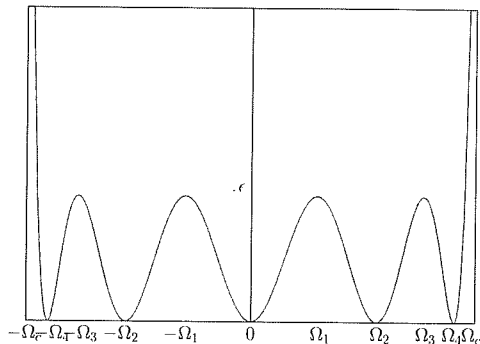


図 5 チェビシエフ形特性

$\pm\Omega_4, \dots$  に 2 位の零点をもつ

2)  $\epsilon - y$  は  $\Omega = \pm\Omega_1, \pm\Omega_3, \dots$  に 2 位の零点、 $\Omega = \pm\Omega_c$  に 1 位の零点をもつ

3)  $y, \epsilon - y$  は 1), 2) 以外の実零点はもたない

4)  $\frac{dy}{d\Omega}$  は  $\Omega = 0$  に  $2m - 1$  位の零点、 $\Omega = \pm\Omega_1, \pm\Omega_2, \pm\Omega_3, \pm\Omega_4, \dots$  に 1 位の零点をもつ。これ以外の零点はもたない

5)  $(\frac{dy}{d\Omega})^2$  は  $\Omega = 0$  に  $4m - 2$  の零点、 $\Omega = \pm\Omega_1, \pm\Omega_2, \pm\Omega_3, \pm\Omega_4, \dots$  に 2 位の零点をもつ。それ以外の実零点はもたない  
式 (22)(25) より

$$\frac{dy}{d\Omega} = \frac{\Omega^{2m-1} \times 2(n+3-m) \text{ 次の偶多項式}}{(\Omega^2 + 1)^2} \quad (26)$$

となるので、

$$\left(\frac{dy}{d\Omega}\right)^2 = \frac{\Omega^{4m-2} \times 4(n+3-m) \text{ 次の偶多項式}}{(\Omega^2 + 1)^4} \quad (27)$$

となる。

一方、式 (22)(25) より

$$y = \frac{\Omega^{2m} P_1(\Omega^2)}{\Omega^2 + 1} \quad (28)$$

となるので、

$$\epsilon - y = \frac{P_3(\Omega^2)}{\Omega^2 + 1} \quad (29)$$

$$P_3(\Omega^2) \text{ は } 2(n+2) \text{ 次の偶多項式で } P_3(0) \neq 0 \quad (30)$$

よって

$$y(\epsilon - y) = \frac{\Omega^2 P_1(\Omega^2) P_3(\Omega^2)}{(\Omega^2 + 1)^2} \quad (31)$$

ここで  $P_1(\Omega^2) P_3(\Omega^2)$  は  $4n + 8 - 2m$  次式である。ところで  $y(\epsilon - y)$  は  $(\Omega_c^2 - \Omega^2)$  の因数を含むが、 $(\frac{dy}{d\Omega})^2$  はこれを含まない。したがって上述の次数に関する議論と合わせると、 $y$  が図 5 の特性をもつためには次の式が成り立つ必要がある。

$$(6 - 2m) \text{ 次偶多項式} \times y(\epsilon - y) = (\Omega_c^2 - \Omega^2) \frac{(\Omega^2 + 1)^2}{\Omega^{2m-2}} \left(\frac{dy}{d\Omega}\right)^2 \quad (32)$$

以下簡単に

$$m = 1 \quad (33)$$

の場合を考える。また式 (32) の  $6 - 2m (= 4)$  次の偶多項式の一つとして以下の場合を考える。

$$(\alpha\Omega^2 + \beta)^2 \quad (34)$$

ただし

$$\alpha, \beta > 0 \quad (35)$$

とする ( $\beta > 0$  は一般性を失わない。もしも  $\alpha < 0$  とすると、式 (34) の形から  $\alpha\Omega^2 + \beta = 0$  の実零点は  $\frac{dy}{d\Omega} = 0$  の点となり、 $\Omega$  の実軸上に  $\Omega_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  以外の零点をもつことになり仮定に反する。したがって式 (35) は一般性を失わない)。

式 (34) のもとで式 (32) は次のようになる

$$(\alpha\Omega^2 + \beta)^2 y(\epsilon - y) = (\Omega_c^2 - \Omega^2)(\Omega^2 + 1)^2 \left(\frac{dy}{d\Omega}\right)^2 \quad (36)$$

または

$$\frac{dy}{\sqrt{y(\epsilon - y)}} = \frac{\alpha\Omega^2 + \beta}{(\Omega^2 + 1)\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}} d\Omega \quad (37)$$



### 3.2 微分方程式の解

式 (37) の左辺の積分は、変数変換を行った後積分公式を用いると

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y(\epsilon - y)}} = -\cos^{-1}\left(\frac{y}{\epsilon} - 1\right) \quad (38)$$

また右辺の積分は

$$\begin{aligned} & \int \frac{\alpha\Omega^2 + \beta}{(\Omega^2 + 1)\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}} d\Omega \\ &= \int \frac{\alpha(\Omega^2 + 1) + (\beta - \alpha)}{(\Omega^2 + 1)\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}} d\Omega \\ &= \alpha \sin^{-1} \frac{\Omega}{\Omega_c} + \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}}{\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}} \Omega \right) \quad (39) \end{aligned}$$

したがって式 (37) は式 (38), (39) より

$$\begin{aligned} & -\cos^{-1}\left(\frac{y}{\epsilon} - 1\right) + C \\ &= \alpha \sin^{-1} \frac{\Omega}{\Omega_c} + \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}}{\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}} \Omega \right) \quad (40) \end{aligned}$$

ここで  $C$  は積分定数. 式 (40) より

$$y = \frac{\epsilon}{2} \left\{ 1 + \cos \left( C - \alpha \sin^{-1} \frac{\Omega}{\Omega_c} - \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}}{\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}} \Omega \right) \right) \right\} \quad (41)$$

ここで  $y(0) = 0$  より積分定数は

$$C = \pi \quad \text{または} \quad -\pi \quad (42)$$

となり, 式 (41) は以下のようになる.

$$y = \frac{\epsilon}{2} \left\{ 1 - \cos \left( \alpha \sin^{-1} \frac{\Omega}{\Omega_c} + \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}}{\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}} \Omega \right) \right) \right\} \quad (43)$$

今以下のように  $\theta_1, \theta_2$  とおく.

$$\theta_1 = \sin^{-1} \frac{\Omega}{\Omega_c} \quad (44)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}}{\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}} \Omega \right) \quad (45)$$

$0 \leq \Omega \leq \Omega_c$  において

$$\frac{\Omega}{\Omega_c} \text{ および } \frac{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}}{\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}} \text{ は単調増加関数} \quad (46)$$

したがって,  $0 \leq \Omega \leq \Omega_c$  において

$$\theta_1 \text{ および } \theta_2 \text{ は単調増加関数} \quad (47)$$

もう少し正確にいうと

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= 0, & \theta_1(\Omega_c) &= \frac{\pi}{2} \\ \theta_2(0) &= 0, & \theta_2(\Omega_c) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (48)$$

を満たす単調増加関数である (図 6 参照). 式 (44), (45) を式 (43) に代入すると以下の式になる.

$$y = \frac{\epsilon}{2} \left[ 1 - \cos \left\{ \alpha \theta_1 + \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}} \theta_2 \right\} \right] \quad (49)$$

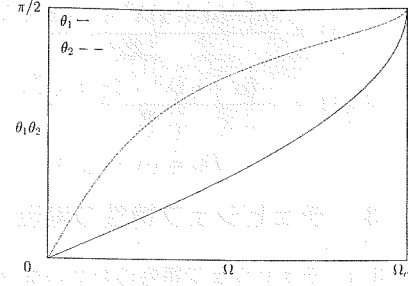


図 6.  $\theta_1$  および  $\theta_2$  のグラフ

また  $y(\Omega_c) = \epsilon$  を満たすべきであるから

$$\begin{aligned} y(\Omega_c) &= \frac{\epsilon}{2} \left[ 1 - \cos \left( \alpha \frac{\pi}{2} + \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}} \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \epsilon \end{aligned} \quad (50)$$

このためには  $l$  を整数として

$$\begin{aligned} \left( \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}} \right) \frac{\pi}{2} &= 2\pi l + \pi \\ \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}} &= 4l + 2 \end{aligned} \quad (51)$$

となる. ここで  $l_o$  を正整数として

$$l_o = \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}} \quad (52)$$

とおくと

$$\alpha = 4l + 2 - l_o \quad (\text{正整数}) \quad (53)$$

となり, また式 (43) は次のようになる.

$$y = y(\Omega) = \frac{\epsilon}{2} [1 - \cos \{ (4l + 2 - l_o)\theta_1 + l_o\theta_2 \}] \quad (54)$$

ここで,

$$\eta_l = \cos \{ (4l + 2 - l_o)\theta_1 + l_o\theta_2 \} \quad (55)$$

とおく. 以下  $l_o = 2$  のときに一般の  $l$  に対して式 (54) が式 (25) の形の有理関数であることを示す.

### 3.3 有理関数であることの証明

$l_o = 2$  として式 (55) を書きなおすと

$$\eta_l = \cos(4l\theta_1 + 2\theta_2) \quad (56)$$

また

$$\begin{aligned} \eta_{l+1} &= \cos(4(l+1)\theta_1 + 2\theta_2) \\ &= \cos(4l\theta_1 + 2\theta_2) \cos 4\theta_1 - \sin(4l\theta_1 + 2\theta_2) \sin 4\theta_1 \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \eta_{l-1} &= \cos(4(l-1)\theta_1 + 2\theta_2) \\ &= \cos(4l\theta_1 + 2\theta_2) \cos 4\theta_1 + \sin(4l\theta_1 + 2\theta_2) \sin 4\theta_1 \end{aligned} \quad (58)$$

したがって

$$\begin{aligned} \eta_{l+1} + \eta_{l-1} &= 2 \cos 4\theta_1 \cos(4l\theta_1 + 2\theta_2) \\ &= 2 \cos 4\theta_1 \eta_l \end{aligned} \quad (59)$$

すなわち

$$\eta_{l+1} = 2 \cos 4\theta_1 \eta_l - \eta_{l-1} \quad (60)$$

そこで  $\cos 4\theta_1$  および  $\eta_1$  を求める。以下  $\theta_1$  および  $\theta_2$  は図 7 を参照する。

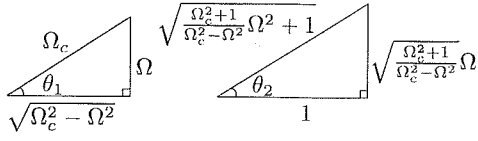


図 7  $\theta_1$  および  $\theta_2$  の関係

$$\begin{aligned} \cos 4\theta_1 &= 2(2 \cos^2 2\theta_1 - 1)^2 - 1 \\ &= 2 \left( 2 \cos^2 2 \left( \sin^{-1} \frac{\Omega}{\Omega_c} \right) - 1 \right)^2 - 1 \\ &= 2 \left[ 2 \left( \frac{\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}}{\Omega_c} \right)^2 - 1 \right]^2 - 1 \\ &= \frac{\Omega_c^4 - 8\Omega_c^2\Omega^2 + 8\Omega^4}{\Omega_c^4} \end{aligned} \quad (61)$$

また  $l = 1$  のとき式 (56) より

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \cos(4\theta_1 + 2\theta_2) \\ &= \cos 4\theta_1 \cos 2\theta_2 - \sin 4\theta_1 \sin 2\theta_2 \end{aligned} \quad (62)$$

$\cos 4\theta_1$  は式 (61) で分かるので、 $\cos 2\theta_2$ ,  $\sin 4\theta_1$ ,  $\sin 2\theta_2$  について調べる。

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= 2 \cos^2 \theta_2 - 1 \\ &= 2 \cos^2 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}}{\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}} \Omega \right) \right] - 1 \\ &= 2 \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_c^2 + 1}{\Omega_c^2 - \Omega^2} \Omega^2 + 1}} \right)^2 - 1 \\ &= \frac{\Omega_c^2 - (2 + \Omega_c^2)\Omega^2}{\Omega_c^2(\Omega^2 + 1)} \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \sin 4\theta_1 &= 2 \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 \\ &= 4 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos 2\theta_1 \\ &= 4 \left[ \sin \left( \sin^{-1} \frac{\Omega}{\Omega_c} \right) \right] \left[ \cos \left( \sin^{-1} \frac{\Omega}{\Omega_c} \right) \right] (2 \cos^2 \theta_1 - 1) \\ &= 4 \frac{\Omega}{\Omega_c} \frac{\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}}{\Omega_c} \left[ 2 \left( \frac{\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}}{\Omega_c} \right)^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= 2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ &= 2 \frac{\frac{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}}{\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}} \Omega}{\sqrt{\frac{\Omega_c^2 + 1}{\Omega_c^2 - \Omega^2} \Omega^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_c^2 + 1}{\Omega_c^2 - \Omega^2} \Omega^2 + 1}} \\ &= 2 \frac{\sqrt{\Omega_c^2 + 1} \Omega \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}}{(\Omega_c^2 + 1)\Omega^2 + (\Omega_c^2 - \Omega^2)} \end{aligned} \quad (65)$$

したがって式 (61), (63), (64), (65) より式 (62) は以下のように

なる。

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \cos 4\theta_1 \cos 2\theta_2 - \sin 4\theta_1 \sin 2\theta_2 \\ &= \frac{\Omega_c^4 - 8\Omega_c^2\Omega^2 + 8\Omega^4}{\Omega_c^4} \frac{\Omega_c^2 - (2 + \Omega_c^2)\Omega^2}{\Omega_c^2(\Omega^2 + 1)} \\ &\quad - 8 \frac{\sqrt{\Omega_c^2 + 1}\Omega^2(\Omega_c^2 - \Omega^2)}{\Omega_c^4(\Omega^2 + 1)} \frac{2(\Omega_c^2 - \Omega^2) - \Omega_c^2}{\Omega_c^2} \end{aligned} \quad (66)$$

よって式 (66) により

$$\eta_1 = \frac{6 \text{ 次偶多項式}}{\Omega^2 + 1} \quad (67)$$

となる。また

$$\eta_1(0) = 1 \quad (68)$$

であることから式 (54) により

$$y(0) = 0 \quad (69)$$

となり、確かに条件を満足している。

次に式 (55) の一般の  $l$  について調べる。 $l = 0$  のときは

$$\eta_0 = \cos 2\theta_2 \quad (70)$$

これは式 (63) により

$$\eta_0 = \frac{2 \text{ 次偶多項式}}{\Omega^2 + 1} \quad (71)$$

となる。また  $l = 2$  のときは  $\cos 4\theta_1$  は (66) により 4 次の偶多項式であることと式 (61), (67) より

$$\eta_2 = \frac{10 \text{ 次偶多項式}}{\Omega^2 + 1} \quad (72)$$

となる。同様にして

$$\eta_l = \frac{(4l + 2) \text{ 次偶多項式}}{\Omega^2 + 1} \quad (73)$$

であることが分かる。以上をもって、 $l_o = 2$  のときに一般の  $l$  に対して式 (54) が有理関数であることを示した。

#### 4. 数値実験

以下式 (54) において  $l = 2$ ,  $l_o = 2$  の図を図 8 に示す。図 8 より関数  $y$  はチェビシェフ形であることが分かる。

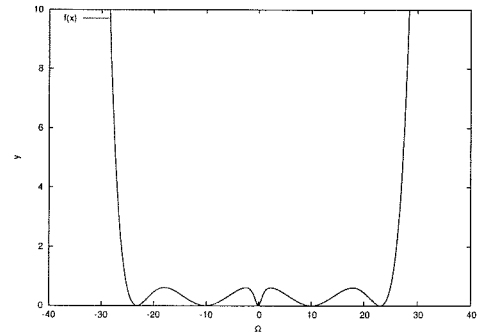


図 8  $y$  の特性

また、実際に式 (6), (20) を用いて SAW フィルタのスペックにあった特性を考える。図 9 は今回用いた基準の特性のグラ

フである。通過域の中心周波数を 900MHz として、減衰極を 875MHz および 925MHz とし、また通過域の  $\pm 10\text{MHz}$  をチェビシェフ形となるようにした。

式 (54) には  $(\Omega_c, \epsilon)$  と自由度があるので以下の図 10, 11 にそれぞれを変化させたときの式 (20) の利得  $(|T|)$  を比較する。 $\Omega_c$  は中心周波数からの帯域幅を決め、 $\epsilon$  は通過域リプルを決めるパラメータである。今回は基準は  $\Omega_c = 0.422$ ,  $\epsilon = 0.001$  である。また 840MHz と 940MHz でどれくらいの減衰量があるのかを表 2, 3 に示している。

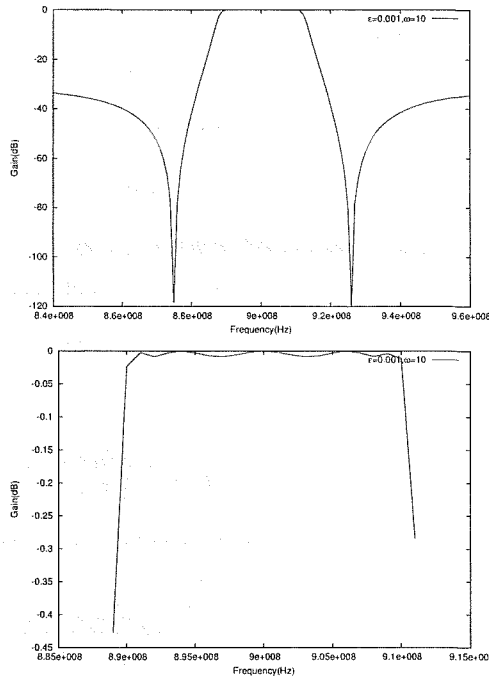


図 9 基準となるグラフ

図 10 は  $\epsilon = 0.01$  と値を固定して  $\Omega_c$  の値を変化させたときのグラフである。 $\Omega_c$  と実際の周波数の対応は以下の表 1 である。 $\Omega_c$  の値が大きくなるほど通過域の特性が改善されるが、

$\Omega_c$	0.422	0.199	0.715
周波数	$\pm 10\text{MHz}$	$\pm 5\text{MHz}$	$\pm 15\text{MHz}$

表 1  $\Omega_c$  と実際の周波数の関係

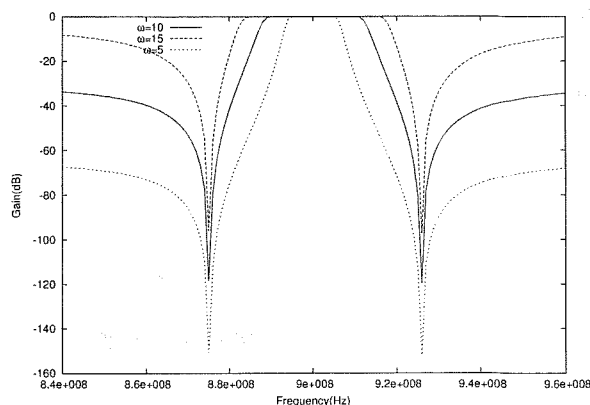


図 10  $\Omega_c$  を変化させたときの利得

周波数	860MHz	940MHz
10MHz	-39.8dB	-41.5dB
5MHz	-73.1dB	-74.7dB
15MHz	-15.7dB	-16.9dB

表 2 860MHz と 940MHz の利得

その一方で減衰極での急峻性また他の帯域での、減衰量が少なくなることが分かる。

また図 11 は  $\Omega_c = 0.422$  と値を固定  $\epsilon$  を変化させたときの利得の図である。 $\epsilon$  が大きいほど通過域での減衰量は減るが、減衰極での急峻性はおよび他の帯域での減衰量が改善できることは分かる。

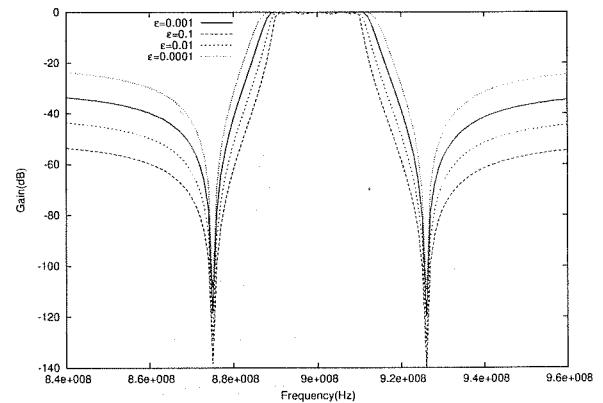


図 11  $\epsilon$  を変化させたときの利得

$\epsilon$	860MHz	940MHz
0.001	-39.8dB	-41.5dB
0.1	-59.8dB	-61.5dB
0.01	-49.8dB	-51.5dB
0.0001	-29.8dB	-31.5dB

表 3 860MHz と 940MHz の利得

## 5. おわりに

本研究では典型的な SAW フィルタの一つである、はしご SAW フィルタの振幅特性は、チェビシェフ形帯域通過フィルとなる関数の導出法を述べ、分母に 2 次偶多項式を持つ有理数となることを示した。またそれをもとに簡単な数値実験をこなった。

今回は SAW フィルタに関連したチェビシェフ形になるように近似した関数を用いて数値計算を行ったが、今後は実際に路設計を見据えた検討をしていく。

## 文 献

- [1] 佐藤良夫, 伊形理, “携帯電話用 RF 帯 SAW フィルタ” 電気報通信学会誌 Vol.84, No.11 pp.782-789, 2001
- [2] 野口和繁, 寺田智, 坂本信義, 駒崎友和, “国内用 CDMA 携帯端末の小型化に貢献する SAW フィルタアンテナ分波器” 沖クニカルレビュー 第 190 号 Vol.69, No.2, pp.54-57, 2002
- [3] 斎藤伸自, 西哲生, “回路網合成演習” 朝倉書店 1985
- [4] 古川達也, 駒崎友和, 西哲生, “通過域最大平坦 SAW フィルの一設計法” 電気情報通信学会技術研究報告, Vol.103, No.56 pp.17-22, January 2004
- [5] 森口繁一, 宇田川 久, 一松信, “数学公式” 岩波全書 198

# スイッチを4個含むDC-DCコンバータの回路構造条件に関する一検討

緒方 将人<sup>†</sup> 西 哲生<sup>†</sup>

<sup>†</sup>九州大学大学院システム情報科学研究院 〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

E-mail: †{mogata,nishi}@csce.kyushu-u.ac.jp

あらまし 電子機器のオンボード電源に最も多用される DC-DC コンバータは、直流電圧を任意の電圧値に変換する電力変換器である。スイッチング方式 DC-DC コンバータ回路は、スイッチ（ダイオード）、キャパシタ及びインダクタの回路素子によって構成される。本稿では、4 個のスイッチを含む回路が昇降圧型のコンバータとなるための回路構造に関する必要十分条件を導出する。導出した回路構造条件を用いることにより、4 スwitchを含む各種コンバータを系統的に求めることができる。

キーワード スwitchング DC-DC コンバータ、回路接続構造、状態平均化法

## On topological conditions for DC-DC converters with four switches

Masato OGATA<sup>†</sup> and Tetsuo NISHII<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University,

6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka, 812-8581 Japan

E-mail: †{mogata,nishi}@csce.kyushu-u.ac.jp

**Abstract** This paper presents a graph-theoretic approach to analyze and synthesize DC-DC converters with four switches. The results are based on the state-space averaging equation and the fundamental graph theory. The proposed method can provide whole families of converters with four switches systematically.

**Key words** Switch-mode DC-DC converter, Circuit topology, State-space averaging analysis

### 1. はじめに

電子機器のオンボード電源に最も多用される DC-DC コンバータは、直流電圧を任意の電圧値に変換する電力変換器であり、DC-DC コンバータ回路部と、これを制御する制御回路部から構成されている。コンバータ回路は電圧変換率から「昇降圧型」、「降圧型」及び「昇降圧型」に分類することができる [1]。スイッチング方式 DC-DC コンバータ回路の基本的な構成素子は、スイッチ（ダイオード）、キャパシタ及びインダクタであり、これらの回路素子の接続構造がコンバータの電圧変換率の方式が決定している。

位相幾何学的アプローチ、すなわち回路素子の接続構造に着目したアプローチは、回路に関する多くの問題に適用され、結果が得られている [2]-[4]。しかしながら、コンバータに関する問題について、接続構造に基づく結果はあまり知られていない [5]-[7]。著者らは、以前、スイッチを2個含むコンバータの状態平均方程式に対して位相幾何学的アプローチを適用し、コンバータの電圧変換率を決定する回路構造に関する必要十分条件を導出した (図1) [8]-[9]。

本稿では、位相幾何学的アプローチを4個のスイッチを含む

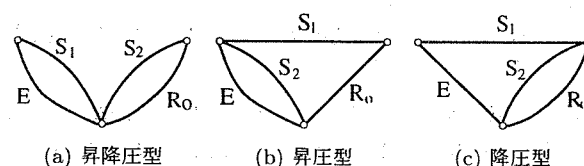


図1 2スイッチコンバータの回路構造条件

コンバータに対して適用し、4スイッチコンバータの回路構造に関する必要十分条件について検討する。図2におけるコンバータセルの電圧変換率を  $f(d)$  とする。ただし、 $d$  はスイッチの時比率であり、制御パラメータの一つである。このとき、同じコンバータセルに対して、入力直流電圧源や出力負荷抵抗を図2とは異なる端子間に接続することにより、電圧変換率  $\frac{1}{f(d)}$ ,  $1 - f(d)$ ,  $\frac{1}{1-f(d)}$  等が得られる [6]。すなわち、昇圧型や降圧型のコンバータも同じコンバータセルによって実現できる。したがって、本稿では、電圧変換率  $1 - \frac{1}{d}$  をもつ三端子コンバータのみを取り扱うこととする。

第2節では、問題設定及び議論に必要な定義や補題を説明する。第3節では、回路の平均化された定常出力を基本カットセット行列を用いて記す。4個のスイッチを含む回路が昇降圧

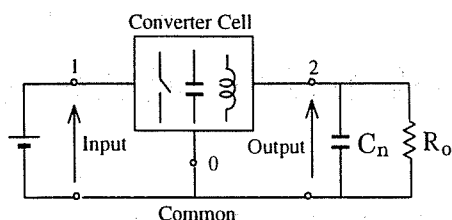


図2 対象となる回路  $N$

型のコンバータとなるための回路構造に関する必要十分条件は第4節で与える。

## 2. 準備

対象となる回路  $N$  (図2) は,  $m$  個のインダクタ  $L_i (i = 1, \dots, m)$ ,  $n$  個のキャパシタ  $C_i (i = 1, \dots, n)$ , 直流電圧源  $E$ , 出力抵抗  $R_o$  及び4個の理想スイッチ  $S_1, S_2, S_3, S_4$  の回路素子から構成されているものとする。回路  $N$  の動作に関して, 次のように仮定する。

[仮定1] 回路  $N$  は2つのフェーズで動作する。フェーズ1では, スイッチ  $S_1$  と  $S_2$  がON, スイッチ  $S_3$  と  $S_4$  がOFFとなり, フェーズ2では,  $S_1$  と  $S_2$  がOFF,  $S_3$  と  $S_4$  がONとなる。

[仮定2] スイッチング周波数は回路  $N$  の固有周波数に比べて十分高いものとする。

回路  $N$  に対応する有向グラフ  $G$  とする。グラフ  $G$  を構成する枝はそれぞれ回路素子に対応づける。例えば, 回路  $N$  中のインダクタ  $L_i$  はグラフ  $G$  における枝  $L_i$  とする。枝の向きは電流の流れる方向に向きづけられているものとする。グラフ  $G$  について次のような仮定をする。

[仮定3] 出力抵抗  $R_o$  とキャパシタ  $C_n$  は互いに並列に接続されている。また, 直流電圧源  $E$  と出力抵抗  $R_o$  は接地されている。

[仮定4] 電圧源枝  $E$  とキャパシタ枝からなる閉路 (タイセット), 及びキャパシタ枝のみからなる閉路は存在しない。

[仮定5] インダクタ枝のみからなるカットセットは存在しない。

[仮定6] 電圧源枝  $E$ , キャパシタ枝, スイッチ枝  $S_1$  及び  $S_2$  からなる閉路は存在しない。また, 電圧源枝  $E$ , キャパシタ枝, スイッチ枝  $S_3$  及び  $S_4$  からなる閉路は存在しない。

[仮定7] インダクタ枝, スイッチ枝  $S_1$  と  $S_2$  からなるカットセットは存在しない。また, インダクタ枝, スイッチ枝  $S_3$  と  $S_4$  からなるカットセットは存在しない。

一般的なDC-DCコンバータでは, 仮定3を満足している。また, 仮定4~7は回路  $N$  がリアクトル電流連続モード (continuous conduction mode: CCM) で動作するための必要条件である。通常のCCMコンバータについて, ダイオードを理想スイッチに置き換えた場合にはこれらの仮定を満足している。したがって, 仮定3~7は妥当である。

本稿の議論を進める上で必要な部分グラフ及びグラフ操作を定義する。

[定義1]  $Q_1$  と  $Q_2$  を, グラフ  $G$  における互いに素な部分枝集合とすると, グラフ  $G$  に対して  $Q_1$  を短絡除去し,  $Q_2$  を開放除去して得られる部分グラフを  $G(Q_1; Q_2)$  と記す。

[定義2] グラフ  $G$  において, 枝  $b_1$  と  $b_2$  はそれぞれ節点  $(v_1, v_2)$  と  $(v_2, v_3)$  間に接続されている。このとき,  $S(b_1; b_2)$  は枝  $b_1$  を  $b_2$  に沿って滑べらせ, 枝  $b_1$  を新たに節点  $(v_1, v_3)$  間に接続させるグラフ操作とする (図3)。特に, 枝  $b_1$  と  $b_2$  がパスに同方向 (反対方向) に含まれている場合, グラフ操作を  $S^+(b_1; b_2)$  ( $S^-(b_1; b_2)$ ) と記す。

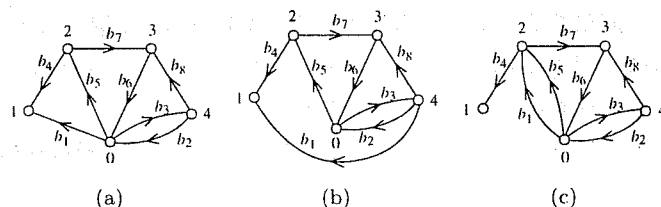


図3 定義2の例。(a) 枝  $b_1$  と  $b_2$  はパス  $\{b_1, b_2\}$  に沿って同方向に含まれている。一方, 枝  $b_1$  と  $b_4$  の向きはパス  $\{b_1, b_4\}$  に沿って反対となっている。(b) (a) のグラフに対して,  $S(b_1; b_2)$  ( $S^s(b_1; b_2)$ ) と適用して得られたグラフ。(c) (a) のグラフに  $S(b_1; b_4)$  ( $S^o(b_1; b_4)$ ) を適用したグラフ。

基本カットセット行列とグラフ間に成り立つ次の補題を議論に用いる。

[補題1] グラフ  $G$  に対し, 基本カットセット行列の主行列<sup>(注1)</sup>が正則であるための必要十分条件は, 列に対応する枝が木をなすことである。

[補題2]  $Q_1, Q_2, Q_3$  及び  $Q_4$  をグラフ  $G$  の互いに素な枝集合とする。木  $T = \{Q_1, Q_2\}$  に関するグラフ  $G$  の基本カットセット行列は

$$C_f = \begin{matrix} & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & C_{13} & C_{14} \\ 0 & 1 & C_{23} & C_{24} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

となる。このとき, 部分行列  $C_{13}$  は部分グラフ  $G(Q_2; Q_4)$  における木  $Q_1$  に関する基本カットセット行列である。また,  $\|Q_1\| = \|Q_3\|$  で,  $C_{13}$  が正則であるとする。行列  $C_f$  に対して, 枢軸要素  $C_{13}$  に関する掃出しにより得られる行列

$$\begin{matrix} & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} C_{13}^{-1} & 0 & 1 & C_{13}^{-1}C_{14} \\ -C_{23}C_{13}^{-1} & 1 & 0 & C_{24} - C_{23}C_{13}^{-1}C_{14} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

は, グラフ  $G$  において木  $\{Q_3, Q_2\}$  に関する基本カットセット行列となる。

[補題3] グラフ  $G$  において, 枝  $b_1$  と  $b_2$  が隣接している<sup>(注2)</sup>とする。枝  $b_1$  と  $b_2$  を含む木  $T$  に関する基本カットセット行列の主要部を

(注1): 行列の正方部分行列で行数が最大のもの

(注2): 二つの枝が端点を共有している

$$C_{fp} = b_1 \begin{bmatrix} Q_\tau \\ P_{\tau\gamma} \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、グラフ  $G$  に対して、 $S(b_1 : b_2)$  を適用して得られたグラフ  $\tilde{G}$  の木  $T$  に関する基本カットセット行列の主要部は

$$\tilde{C}_{fp} = b_1 \begin{bmatrix} Q_\tau \\ P_{\tau\gamma} \\ p_1 \pm p_2 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

となる。±の符号は枝  $b_1$  と  $b_2$  がパス  $\{b_1, b_2\}$  に沿って含まれている方向によって決定される。枝  $b_1$  と  $b_2$  がパスに沿って同方向である場合、すなわちグラフ操作  $S^s(b_1 : b_2)$  を適用した場合は、負号をとる。

### 3. 回路解析

仮定 4～7 から、グラフ  $G$  について次の性質が得られる。

性質 1] グラフ  $G$  において枝  $S_1, S_2, E$  と  $C \equiv \{C_i\}$  は木  $T$ 、枝  $S_3, S_4, E$  と  $C$  は木  $T'$  をなす。また、 $L \equiv \{L_i\}$  と  $R_o$  は補木となる。

木  $T$  に関する基本カットセット行列の主要部  $C_{fp}$  は次のようになる：

$$C_{fp} \equiv \begin{bmatrix} S_3 & S_4 & L & R_o \\ S_1 & \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} & 0 \\ S_2 & \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} & 0 \\ C_1 & \alpha_1 & \beta_1 & p_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_n & \alpha_n & \beta_n & p_n & 1 \\ E & \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & p_{n+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $p_i$  は  $m$  次の行ベクトルである。

また、枝  $E$  と  $R_o$  は隣接されている (仮定 3)。グラフ  $G$  に対して  $S(E : R_o)$  を適用して得られるグラフを  $\tilde{G}$  とすると、木  $T$  に関する基本カットセット行列の主要部は

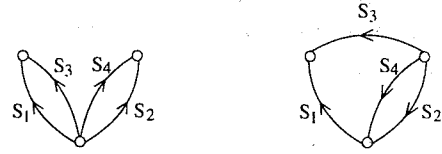
$$\tilde{C}_{fp} \equiv \begin{bmatrix} S_3 & S_4 & L & R_o \\ S_1 & \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} & 0 \\ S_2 & \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} & 0 \\ C_1 & \alpha_1 & \beta_1 & p_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_n & \alpha_n + \alpha_{n+1} & \beta_n + \beta_{n+1} & p_n + p_{n+1} & 1 \\ E & \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & p_{n+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

となる。

性質 1 から、グラフ  $G(C, E; L, R_o)$  の木  $\{S_1, S_2\}$  に関する基本カットセット行列の主要部は、

$$C_{1E} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

となる (注 3)。



(a) cascaded connection (b) traversed connection

図 4 部分グラフ  $G(C, E; L, R_o)$

状態平均化法から、回路  $N$  の定常出力は式 (1) の基本カットセット行列を用いて表すことができる。

[補題 4] (Nishi et al. [8]) 回路  $N$  の定常出力  $v_o$  の分母と分子が任意のスイッチ時比率に対して、非零となるための必要十分条件は、 $m = n$ 、すなわち、インダクタとキャパシタが同数である。 $m = n$  の場合、定常出力  $v_o$  は、

$$v_o = \frac{\Delta_n}{\Delta_d} E = \frac{b_1 d^2 + b_2 d d' + b_3 d'^2}{a_1 d^2 + a_2 d d' + a_3 d'^2} E \quad (4)$$

となる。ここで、 $d$  及び  $d'$  はそれぞれフェーズ 1 と 2 の時比率であり、 $d + d' = 1$  である。また、分母、分子及び係数は

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ d' \alpha_1 & d' \beta_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d' \alpha_{n-1} & d' \beta_{n-1} & p_{n-1} \\ d' \alpha_n & d' \beta_n & p_n \end{vmatrix}, \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ d' \alpha_1 & d' \beta_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d' \alpha_{n-1} & d' \beta_{n-1} & p_{n-1} \\ d' \alpha_{n+1} & d' \beta_{n+1} & p_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ 0 & 0 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & p_{n-1} \\ 0 & 0 & p_n \end{vmatrix}, a_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ \alpha_1 & \beta_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & p_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n & p_n \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ 0 & \beta_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta_{n-1} & p_{n-1} \\ 0 & \beta_n & p_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ \alpha_1 & 0 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 0 & p_{n-1} \\ \alpha_n & 0 & p_n \end{vmatrix}$$

となる。係数  $b_1, b_2$  及び  $b_3$  は、それぞれ係数  $a_1, a_2$  及び  $a_3$  の行列式の最終行の添字  $n$  を  $n+1$  としたものである。

(注 3) : グラフ  $G$  におけるスイッチ枝の番号及び向きは、式 (3) のカットセット行列の一方を満足するように常に与えられることができる。

式 (4) から、電圧変換率  $-\frac{d'}{d} (= 1 - \frac{1}{d})$  を実現するためには 4 つのタイプを考えることができる。

$$(I) -\frac{dd'}{d^2} \quad (II) -\frac{d'^2}{dd'} \quad (III) -\frac{d'(d+d')}{d(d+d')} \quad (IV) -\frac{d'(d-d')}{d(d-d')}$$

補題 4 から、次の結果を導出できる。

[補題 5] 回路  $N$  がタイプ (I) の電圧変換率をもつとき、次の条件を満足している<sup>(註4)</sup>。

$$\begin{aligned} |p_1^T \cdots p_{n-1}^T p_n^T| &\neq 0 \quad |p_1^T \cdots p_{n-1}^T p_{n+1}^T| = 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{01} & \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\alpha}_{02} & \hat{\beta}_{02} \end{bmatrix} &= 0 \quad \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{01} & \beta_{01} \\ \hat{\alpha}_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \hat{\beta}_{01} \\ \alpha_{02} & \hat{\beta}_{02} \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{01} & \tilde{\beta}_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} & \tilde{\beta}_{02} \end{bmatrix} &= 0 \quad \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{01} & \beta_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \tilde{\beta}_{01} \\ \alpha_{02} & \tilde{\beta}_{02} \end{bmatrix} = -1 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{01} & \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\alpha}_{02} & \hat{\beta}_{02} \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{01} \\ p_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{01} & \tilde{\beta}_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} & \tilde{\beta}_{02} \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} p_{01} \\ p_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n + p_{n+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \alpha_n + \alpha_{n+1} & \beta_n + \beta_{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式 (1) 及び (2) から、補題 5 中の  $2 \times 2$  行列は次のような性質をもつ。

[性質 2] 行列  $\hat{C}_{1II} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{01} & \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\alpha}_{02} & \hat{\beta}_{02} \end{bmatrix}$  は、部分グラフ  $G(L, E; C, R_o)$  における木  $\{S_1, S_2\}$  に関する基本カットセット行列の主要部である。

[性質 3] 行列  $\tilde{C}_{1II} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{01} & \tilde{\beta}_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} & \tilde{\beta}_{02} \end{bmatrix}$  は、部分グラフ  $\tilde{G}(L, E; C, R_o)$  における木  $\{S_1, S_2\}$  に関する基本カットセット行列の主要部である。

[補題 5 の証明] 式 (4) の定常出力  $v_o$  が電圧変換率 (I) を満足するには、 $a_1 \neq 0$  かつ  $b_1 = 0$  となる。したがって、

$$\begin{aligned} |p_1^T \cdots p_{n-1}^T p_n^T| &\neq 0 \\ |p_1^T \cdots p_{n-1}^T p_{n+1}^T| &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。また、これらの行列式の和から

$$\begin{aligned} |p_1^T \cdots p_{n-1}^T p_n^T + p_{n+1}^T| \\ (= |p_1^T \cdots p_{n-1}^T p_n^T|) \neq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

(注 4) : タイプ (II) ~ (IV) の電圧変換率に関する結果も補題 4 から同様に求めることができる。

である。ここで、 $d + d' = 1$  を用いると、式 (4) の分母  $\Delta_d$  は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} \Delta_d &= \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} - d' \begin{bmatrix} p_{01} \\ p_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} \cdot \left| d \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} + d' \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{01} & \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\alpha}_{02} & \hat{\beta}_{02} \end{bmatrix} \right|. \end{aligned} \quad (7)$$

同様に、式 (4) 中の分母  $\Delta_d$  と分子  $\Delta_n$  の和は次のように展開できる。

$$\Delta_d + \Delta_n = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n + p_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \left| d \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} + d' \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{01} & \tilde{\beta}_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} & \tilde{\beta}_{02} \end{bmatrix} \right|. \quad (8)$$

式 (3) 及び (6) から、回路  $N$  がタイプ (I) の電圧変換率をもつには、式 (4) の係数は  $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, b_1 = 0, b_2 = -1$  及び  $b_3 = 0$  となる。したがって、式 (7) と (8) に代入すると条件が得られる。

#### 4. 回路構造に関する条件

補題 5 の行列式に関する条件は、性質 2 及び 3 を用いるとグラフ  $G$  に関する条件に言い換えることができる。タイプ (I) の電圧変換率の回路構造に関する条件は次の通りとなる。

[定理 1] 部分グラフ  $G(C, E; L, R_o)$  が図 4(a) の接続 (cascaded connection) をもつものとする。このとき、回路  $N$  がタイプ (I) の電圧変換率をもつ昇降圧型コンバータとなるには、次の条件 i) ~ iv) のうち一つを満足することが必要十分である<sup>(註5)</sup>。

- i) グラフ  $G(L, S_2; C, S_4)$  が図 5(a) の接続構造をもち、かつ、グラフ  $G(L; C)$  にスイッチ枝  $S_2$  と  $S_4$  を同時に含む閉路が存在しない。
- ii) グラフ  $G(L, S_1; C, S_3)$  が図 5(b) の接続構造をもち、かつ、グラフ  $G(L; C)$  にスイッチ枝  $S_1$  と  $S_3$  を同時に含む閉路が存在しない。
- iii) グラフ  $G(L; C)$  が図 5(c) の接続構造をもつ<sup>(註6)</sup>。
- iv) グラフ  $G(L; C)$  が図 5(d) の接続構造をもつ。

[定理 1 の証明] グラフ  $G(C, E; L, R_o)$  が図 4(a) の接続構造

(注 5) : 理想スイッチは極性を有さないにもかかわらず、図 5 中のスイッチ枝の向きはきわめて重要である。これは、グラフ  $G(C, E; L, R_o)$  でスイッチ枝の向きを式 (3) を満足するように与えているためである (注 3)。したがって、スイッチ枝  $S_1$  と  $S_3$  ( $S_2$  と  $S_4$ ) の向きは相対的に関係している。すなわち、図 5 で枝  $S_1$  の向きを逆にした場合、枝  $S_3$  の向きも運動して変えなければ条件は成立しない。

(注 6) : 図 5(c) において、枝  $S_1$  と  $S_3$  をそれぞれ枝  $S_2$  と  $S_4$  で置き換えてたグラフも含む。図 5(d) についても同様である。

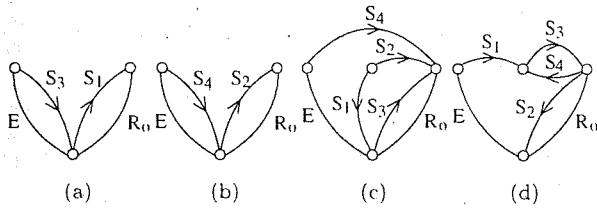


図5 定理1のグラフ

をもつとき、

$$C_{I\parallel} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。したがって、補題5の条件は次の通りとなる。

$$\begin{vmatrix} p_1^T & \cdots & p_{n-1}^T & p_n^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1^T & \cdots & p_{n-1}^T & p_n^T + p_{n+1}^T \end{vmatrix} \neq 0, \quad (9)$$

$$\text{Det } \hat{C}_{I\parallel} = 0 \quad (a) \quad \text{Tr } \hat{C}_{I\parallel} = 0 \quad (b)$$

$$\text{Det } \tilde{C}_{I\parallel} = 0 \quad (c) \quad \text{Tr } \tilde{C}_{I\parallel} = -1 \quad (d)$$

行列  $\hat{C}_{I\parallel}$  と  $\tilde{C}_{I\parallel}$  は完全単模 (ユニモジュラー) 性を有しているため、(a)~(d) を満足する行列は次の2通りとなる<sup>(注7)</sup>。

$$\text{Case 1) } \hat{C}_{I\parallel} = \begin{bmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{C}_{I\parallel} = \begin{bmatrix} -1 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ただし、 $pq = 0$ ,  $xy = 0$  である。

$$\text{Case 2) } \hat{C}_{I\parallel} = \begin{bmatrix} -1 & p \\ q & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{C}_{I\parallel} = \begin{bmatrix} -1 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ただし、 $pq = -1$ ,  $xy = 0$  である。

補題1と2から、式(9)の条件はグラフ  $G(L; C)$  と  $\tilde{G}(L; C)$  において枝集合  $\{S_1, S_2, E\}$  が木をなすことと等価である。グラフ  $G(L; C)$  における、木  $\{S_1, S_2, E\}$  に関する基本カットセット行列の主要部は

$$\begin{array}{c} S_3 \quad S_4 \quad \tilde{E} \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ E \end{matrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{01} & \hat{\beta}_{01} & k \\ \hat{\alpha}_{02} & \hat{\beta}_{02} & l \\ \hat{\alpha}_{n+1} & \hat{\beta}_{n+1} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (12)$$

となる<sup>(注8)</sup>。ここで、 $\tilde{E}$  はグラフ  $G(L; C)$  において節点 (1,2) 間に接続されている枝であり、グラフ  $\tilde{G}(L; C)$  における枝  $E$  に相当する枝である。また、行列 (12) の要素  $k$  と  $l$  について次の仮定をする。

[仮定8] <sup>(注9)</sup>  $k \neq 0$  のときは、 $k = 1$  である。 $l$  についても同様。

(注7) : 行列の第一行 (列) と第二行 (列) を入れ換えた行列も同じものとして取り扱う

(注8) : 枝  $R_0$  に関する列は除いている

(注9) :  $k = -1$  の場合は、グラフ  $G$  において枝  $S_1$  と  $S_3$  の向きを反対にすれば、 $k = 1$  とすることができる。したがって、この仮定により一般性を失うことはない。

行列 (12) において、 $(E, \tilde{E})$  に関する要素 1 を枢軸要素として掃出して得られた行列

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{01} - k\hat{\alpha}_{n+1} & \hat{\beta}_{01} - k\hat{\beta}_{n+1} & 0 \\ \hat{\alpha}_{02} - l\hat{\alpha}_{n+1} & \hat{\beta}_{02} - l\hat{\beta}_{n+1} & 0 \\ \hat{\alpha}_{n+1} & \hat{\beta}_{n+1} & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

における二次の首席小行列は、 $\tilde{C}_{I\parallel}$  である。したがって、式 (10), (11) 及び (13) から、行列 (12) は

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{01} & \hat{\beta}_{01} & k \\ \hat{\alpha}_{02} & \hat{\beta}_{02} & l \\ \hat{\alpha}_{n+1} & \hat{\beta}_{n+1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & p & 1 \\ q & 0 & l \\ 1 & \beta & 1 \end{bmatrix} & : \text{Case 1} \\ \text{ただし、} \beta l = pq = \beta q + lp = 0 \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & k \\ -1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix} & : \text{Case 2} \\ \text{ただし、} \alpha - k = -1 \end{cases} \quad (14)$$

となる。式 (14) を基本カットセット行列の主要部として満足する図5のグラフ  $G(L; C)$  が得られる。□

グラフ  $G(C; E; L, R_0)$  が図4(b)の接続構造 (traversed connection) を持つ場合、グラフ  $G(C; E; L, R_0)$  における基本カットセット行列の主要部は

$$C_{I\parallel} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。したがって、 $C_{I\parallel}$ ,  $\hat{C}_{I\parallel}$  及び  $\tilde{C}_{I\parallel}$  の  $-1$  倍した第一行を第二行に加えることにより、前述の議論 (cascaded connection の場合) を適用することができる。補題3と定理1から、次の結果が得られる。

[系1] 部分グラフ  $G(C; E; L, R_0)$  が図4(b)の接続 (traversed connection) をもつものとする。グラフ  $G(L; C)$  に対して、 $S(S_1 : S_2)$  を適用して得られるグラフを  $G$  とする。このとき、回路  $N$  がタイプ (I) の電圧変換率をもつ昇降圧型コンバータとなるには、次の条件 i)~iv) のうち一つを満足することが必要十分である。

- i) グラフ  $G(S_2; S_4)$  が図5(a)の接続構造をもち、かつ、グラフ  $G$  にスイッチ枝  $S_2$  と  $S_4$  を同時に含む閉路が存在しない。
- ii) グラフ  $G(S_1; S_3)$  が図5(b)の接続構造をもち、かつ、グラフ  $G$  にスイッチ枝  $S_1$  と  $S_3$  を同時に含む閉路が存在しない。
- iii) グラフ  $G$  が図5(c)の接続構造をもつ
- iv) グラフ  $G$  が図5(d)の接続構造をもつ。

タイプ (II)~(IV) の電圧変換率に関する回路構造条件については結果のみを記す。

[定理2] 部分グラフ  $G(C; E; L, R_0)$  が図4(a)の接続 (cascaded connection) をもつものとする。このとき、回路  $N$  がタイプ (II)~(IV) の電圧変換率  $-\frac{d'}{d}$  をもつ昇降圧型コンバータとなるには、次の条件のうち一つを満足することが必要十分で



ある<sup>(注10)</sup>。

- 1) グラフ  $G(L, S_4; C, S_2)$  が 図 6(a) の接続構造をもち、かつ、グラフ  $G(L; C)$  にスイッチ枝  $S_2$  と  $S_4$  を同時に含む閉路が存在しない。
- 2) グラフ  $G(L, S_3; C, S_1)$  が 図 6(b) の接続構造をもち、かつ、グラフ  $G(L; C)$  にスイッチ枝  $S_1$  と  $S_3$  を同時に含む閉路が存在しない。
- 3) グラフ  $G(L, S_2; C, S_4)$  が 図 6(a) の接続構造をもち、かつ、グラフ  $G(L; C)$  にスイッチ枝  $S_2$  と  $S_4$  のみからなるカットセットもしくは閉路が存在する。
- 4) グラフ  $G(L, S_1; C, S_3)$  が 図 6(b) の接続構造をもち、かつ、グラフ  $G(L; C)$  にスイッチ枝  $S_1$  と  $S_3$  のみからなるカットセットもしくは閉路が存在する。
- 5) グラフ  $G(L; C)$  が 図 6(c) の接続構造をもつ。
- 6) グラフ  $G(L; C)$  が 図 6(d) の接続構造をもつ。
- 7) グラフ  $G(L; C)$  が 図 6(e) の接続構造をもつ。
- 8) グラフ  $G(L; C)$  が 図 6(f) の接続構造をもつ。

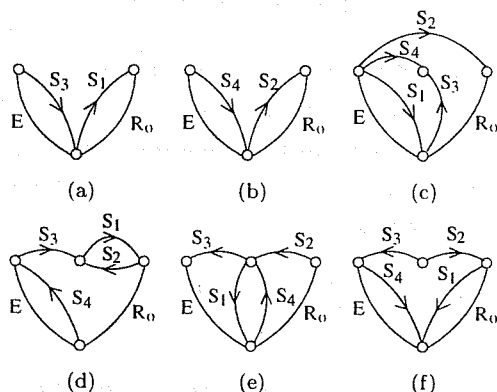


図 6 定理 2 のグラフ

## 5. む す び

本稿では、4 個のスイッチを含む回路が昇降圧型 DC-DC コンバータとして動作するための判別法を回路構造に着目して検討し、必要十分条件を与えた。導出した回路構造条件を用いることにより、4 スイッチを含む各種コンバータを系統的に求めることができる。

謝辞 本研究の遂行にあたり、21 世紀 COE プログラム「システム情報科学での社会基盤システム形成」からの助成を受けた。

## 文 献

- [1] 原田 耕介, 二宮 保, 顧 文建, “スイッチングコンバータの基礎,” コロナ社, 1992.
- [2] G. M. Wierzb, “Op-amp relocation: A topological active network synthesis,” *IEEE Trans. Circuit Syst.*, vol. CAS-33, pp. 469 - 475, May 1986.
- [3] M. Tanaka M and S. Mori, “Topological formulations for the

coefficient matrices of state equations for switched-capacitor networks,” *IEEE Trans. Circuit Syst.*, vol. CAS-29, pp. 106 - 115, February 1982.

- [4] T. Nishi and L. O. Chua, “Topological criteria for nonlinear resistive circuits containing controlled sources to have a unique solution,” *IEEE Trans. Circuit Syst.*, vol. CAS-31, pp. 722 - 741, August 1984.
- [5] D. H. Wolaver, “Basic constraints from graph theory for dc-to-dc conversion networks,” *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-19, pp. 640 - 648, November 1972.
- [6] R. Tymerski and V. Vorperian, “Generation, classification and analysis of switched-mode DC-to-DC converters by the use of converter cells,” *Proc. of IEEE INELEC*, pp.181-195, 1986.
- [7] J. Chen, D. Maksimović, and R. Erickson, “Buck-boost PWM converters having two independently controlled switches,” *Power Electronics Specialists Conference, 2001. PESC. 2001 IEEE 32nd Annual*, vol.2, pp.736-741, 2001.
- [8] T. Nishi, T. Ogishima, and M. Ogata, “Topological conditions on switched mode dc-dc converters,” *ITC-CSCC'02*, pp.1129-1132, July 2002.
- [9] M. Ogata and T. Nishi, “Topological criteria for switched mode dc-dc converters,” *Proc. of ISCAS2003*, vol.3 pp.184-187, May 2003.
- [10] M. Ogata and T. Nishi, “Topological conditions for 4-switch DC-DC converters,” *Proc. 2003 ISEE*, pp.63-66, 2003.
- [11] 梶谷 洋司, 回路のためのグラフ理論, 昭晃堂, 1979.

(注10) : 図 6 のグラフにおいて、スイッチ枝  $S_1$  と  $S_3$  ( $S_2$  と  $S_4$ ) の向きは相対的に関係しており、枝  $S_1(S_2)$  の向きを逆にした場合、枝  $S_3(S_4)$  の向きも運動して変えたグラフも含む。また、図 6(c)~(f) において、枝  $S_1$  と  $S_3$  をそれぞれ枝  $S_2$  と  $S_4$  で置き換えてグラフも含む。

# 変成器を含む DC-DC コンバータの回路構造条件について

西 哲生<sup>†</sup> 緒方将人<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 早稲田大学理工学術院

〒 169-0072 新宿区大久保 2-4-12

<sup>††</sup> 九州産業大学工学部電気工学科

〒 813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1

E-mail: <sup>†</sup>nishi-t@waseda.jp, <sup>††</sup>mogata@te.kyusan-u.ac.jp

**あらまし** 本稿ではあるクラスのスイッチングコンバータの一般的解析方を与え、またその結果に基づいて回路構造について考察し、DC-DC コンバータとして動作するためのいくつかの必要条件、必要十分条件を導出する。

**キーワード** DC-DC コンバータ、解析、回路構造、回路構造上の条件

Tetsuo NISHI<sup>†</sup> and Masato OGATA<sup>††</sup>

<sup>†</sup> Waseda University

Shinjuku-ku, Tokyo

<sup>††</sup> Kyushu Sangyou University

Fukuoka

E-mail: <sup>†</sup>nishi-t@waseda.jp, <sup>††</sup>mogata@te.kyusan-u.ac.jp

**Abstract** This paper studies on the topological condition for the switching converter to work as DC-DC converters and give some necessary conditions for them.

**Key words** DC-DC converter, circuit configuration, topological conditions

## 1. ま え が き

DC-DC コンバータはパソコンをはじめとする電子機器のキーデバイスであり、長年に亘り研究され、研究され尽くされた感もある。しかし、当初から問題である効率の問題の他にも、新たな問題も生じ、未だに盛んに研究されている。

著者らは以前、電流連続モード形 DC-DC コンバータに関して、回路構造と変換特性との関係、具体的には、スイッチングの時比率を  $d, d'$  としたとき、変換ゲインと  $d, d'$  との関係及び所望の特性 (昇圧形、降圧形、昇降圧形) を実現するための回路構造について発表を行った。これらの発表では変成器を含まない回路について検討しているが、変成器を含む DC-DC コンバータは、非接触形として、実用的に重要で、本稿ではこの場合を扱っている。

本稿では変成器を含む回路に対して同様な検討を行うのが目的である。変成器は理想変成器とインダクタで等価表現できるが、通常の回路解析でも理想変成器の取り扱いが特殊で、解析の際注意を要する。本稿では 3 巻線変成器を 1 個含む回路について検討する。

本稿では、変成器を含む電流連続モード形回路を対象として、その解析法を述べ、DC-DC コンバータとして動作するための

回路構造上の条件を考察したものであり、そのためのいくつかの必要条件等を導く。

## 2. 理想変成器を含む回路の状態平均化方程式の導出

### 2.1 仮 定

DC-DC コンバータの基本回路素子としては、DC 電圧源、スイッチ、インダクタ、キャパシタ、ダイオード、変成器及び (出力) 抵抗であるが、本稿では変成器を含む回路の簡単な場合を考えることとして、変成器は 1 個とし、図 1 の回路について検討する。2 巻線変成器もあり得るが、この場合は単なる電圧変換回路に近いので、解析に関して特に困難はないし、特性としても特に興味ある場合は得られないであろう。

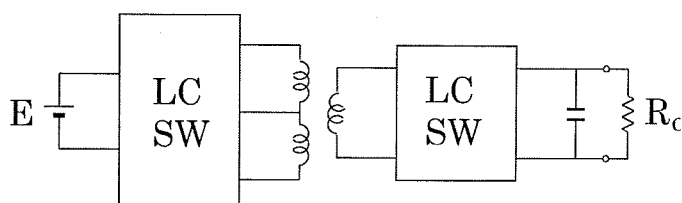


図 1 考察対象の回路

ダイオードは理想的と考えるので、当分の間スイッチと見なし解析することにする。したがって回路は、1 個の DC 電圧源  $E$ 、 $k$  個のスイッチ  $S_1, S_2, \dots, S_k$ 、 $m_L$  個のインダクタ  $L_1, L_2, \dots, L_{m_L}$ 、 $m_C$  個のキャパシタ  $C_1, C_2, \dots, C_{m_C}$ 、1 個の出力抵抗  $R_o$  からなるとする。

仮定 1：回路は 2 フェーズで同期して動作するとする。

スイッチを 2 組に分け、一組を  $S_1, \dots, S_{k_1}$ 、他を  $S_{k_1+1}, \dots, S_k$  とする。 $S_1, \dots, S_{k_1}$  が ON のとき、 $S_{k_1+1}, \dots, S_k$  は OFF とし、次のフェーズではこの逆とする。 $\{S_1, \dots, S_{k_1}\}$  を  $\hat{S}$  で表し、 $\{S_{k_1+1}, \dots, S_k\}$  を  $\hat{\bar{S}}$  で表すことにする。

仮定 2： $E$  と  $\{C_i\}$  のみからなる閉路はないとする。

仮定 3： $\{L_i\}$  のみからなるカットセットはないとする。

以下の解析では仮定 2、3 をかなり利用している。

スイッチを切替えた際、もしもインダクタ電流が不連続に変化すると、必ず何らかのエネルギーの損失が生じ、それだけではなく、サージ電圧やノイズも発生し、DC-DC コンバータとしては望ましくない。キャパシタ電圧についても同様である。したがって、

仮定 4：インダクタ電流は不連続には変化しない。

仮定 5：キャパシタ電圧は不連続には変化しない。

仮定 4,5 より、

補題 1： $\hat{S}$  のスイッチ (1 個以上) と  $E$ 、 $\{C_i\}$  からなる閉路は存在しない。また同様に、 $\hat{\bar{S}}$  のスイッチ (1 個以上) と  $E$ 、 $\{C_i\}$  からなる閉路も存在しない。

補題 2：1 個以上の  $\hat{S}$  のスイッチ (または  $\hat{\bar{S}}$  のスイッチ) と  $\{L_i\}$  からなるカットセットは存在しない。

仮定 6：出力抵抗  $R_o$  は  $C_n$  に並列に接続されているとする (図 1 参照)。

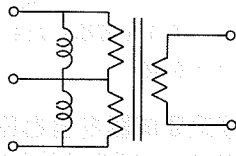


図 2 変成器の等価回路

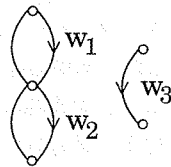


図 3 変成器のグラフ表現

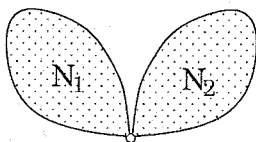


図 4 グラフ  $G$  の二つの成分

## 2.2 回路のグラフの表現

図 1 の 3 巻線密結合変成器の等価回路を図 2 のように、励磁インダクタ  $L_1, L_2$  と 3 巻線理想変成器とからなるとする。このグラフ表現を図 3 で表す。理想変成器に対応する枝を  $W_1, W_2, W_3$  で表す。 $W_i$  の向きは図のようにとる。インダクタの集合  $L$  は通常のインダクタに  $L_1, L_2$  を加えたものとする。 $W_k (k = 1, 2, 3)$  の電圧、電流をそれぞれ  $v_k, i_k$  とする。

変成器の  $W_1, W_2, W_3$  の巻線比を一般性を失うことなく、 $1 : n : 1$  とする。したがって、

$$v_1 : v_2 : v_3 = 1 : n : 1 \quad (1)$$

$$i_1 + ni_2 + i_3 = 0 \quad (2)$$

以下では、 $\hat{S}$  を ON、 $\hat{\bar{S}}$  を OFF の状態をフェーズ 1 とし、 $\hat{\bar{S}}$  を OFF、 $\hat{S}$  を ON とした状態をフェーズ 2 と呼ぶことにする。

回路全体の枝 ( $\hat{S}, \hat{\bar{S}}, E, \{L_i\}, \{C_i\}, R_o$ ) からなるグラフを  $G$  で表わす。またフェーズ 1 におけるグラフ、すなわち、 $G(N)$  の  $\hat{S}$  を短絡除去し  $\hat{\bar{S}}$  を開放除去したグラフを  $G(N_1)$  または  $G_1$  で表わし、フェーズ 2 のグラフ ( $\hat{\bar{S}}$  を開放除去、 $\hat{S}$  を短絡除去) を  $G(N_2)$  または  $G_2$  で表わすことにする。

補題 1 は、 $\hat{S}$  の全ての枝と  $E$ 、 $\{C_i\}$  が木 (の一部) になりうることを示しており、一方補題 2 では、 $\hat{\bar{S}}$  のすべての枝と  $R_o$ 、 $\{L_i\}$  が補木の一部となりうることを示している。

仮定 1~5 には  $W_i$  が含まれていないが、 $W_i (i = 1, 2, 3)$  があるために、議論が相当変わってくる。以下では、 $W_i (i = 1, 2, 3)$  を木枝にとるか、補木枝にとるかについて述べる。

今、フェーズ 1 において  $W_1$  と  $L_i$  のみからなるカットセットがあると仮定する。簡単のため、このカットセットを  $W_1, L_1, L_2, \dots, L_k$  とし、これらの電流を  $i_1', i_1, \dots, i_k$  とすると、

$$i_1' + i_1 + \dots + i_k = 0 \quad (3)$$

すなわち、

$$i_1' = -(i_1 + \dots + i_k) \quad (4)$$

インダクタ電流の連続性 (仮定 4) により、

$$i_1'(+0) = -\{i_1(-0) + \dots + i_k(-0)\} \quad (5)$$

上と同時に、もしも  $W_2$  とインダクタのみからなるカットセット及び  $W_3$  とインダクタのみからなるカットセットがともにあるとすると、式 (5) と同様に  $W_i (i = 2, 3)$  の電流  $i_2(+0)$ 、 $i_3(+0)$  も定まる。ところで、 $W_i (i = 1, 2, 3)$  の電流の間には、式 (2) が成り立つべきであるが、スイッチを切り替える前の電流の間には一般にはこのような関係はない。このことから、

補題 3：どちらのフェーズにおいても、 $W_i (i = 1, 2, 3)$  と  $L$  のみからなるカットセットがすべて揃って存在してはならない。

補題 1 では、 $W_1$  と  $L_i$ 、 $W_2$  と  $L_i$  のカットセットが同時にあるのは構わない。

同様に今度は、 $C, E$  と  $W_i (i = 2, 3)$  とからなる閉路について考える。

今あるフェーズにおいて、 $C, E$  と  $W_1$  からなる閉路があるとすると、

$$v'_1 + v_1 + \dots + v_k = 0 \quad (6)$$

すなわち、

$$v'_1 = -(v_1 + \dots + v_k) \quad (7)$$

キャパシタ電圧の連続性 (仮定 5) により、

$$v'_1(+0) = -\{v_1(-0) + \dots + v_k(-0)\} \quad (8)$$

により定まる。同様にしてもしも  $C, E$  と  $W_2$  からなる閉路があるとする、 $v_2(+0)'$  が定まる。しかし、 $v'_1(+0), v'_2(+0)$  の間には変成器の特性 (1) から  $1:n$  の関係がなければならないが、スイッチを切り替える前の状態は一般にはこれを満足しない。このことから、

**補題 4:** どちらのフェーズにおいても、 $W_i (i = 1, 2, 3)$  と  $C, E$  のみからなる閉路が 2 個以上あつてはならない。

これらのことから次のことが分かる。

**定理 1:** どちらのフェーズにおいても、 $W_i (i = 1, 2, 3)$  のうちの二つは木枝、一つは補木枝でなければならない。

**証明)**  $G$  において、 $W_1$  と  $W_2$  が補木であると仮定する。このことは、 $W_1$  と  $E, C$  からなる閉路が存在し、かつ  $W_2$  と  $E, C$  からなる閉路も存在することになり、補題 4 に反する。この結果、 $W_i (i = 1, 2, 3)$  の中の補木枝は高々 1 個となる。

また逆に、 $W_i (i = 1, 2, 3)$  すべてが木枝とする。この結果、 $W_i$  と  $L$  からなるカットセットが存在することになり、補題 3 に反する。これで補題 2 の証明が終わる。

この結果、一般性を失うことなく次のように仮定できる。

**仮定 7:** フェーズ 1 では、 $W_1, W_2$  が木枝とし、 $W_3$  が補木枝とする。またフェーズ 2 では、 $W_1, W_3$  が木枝とし、 $W_2$  が補木枝とする。

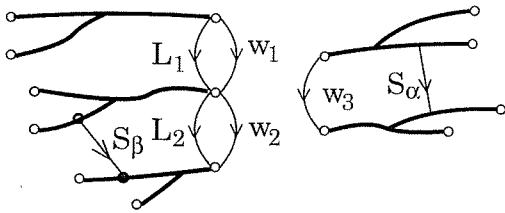


図 5 スイッチ枝  $S_\alpha, S_\beta$  枝の入り方

仮定 7 が成り立つための条件について考える。

図 4 の  $N_1$  においては、 $C, E$  の枝が 3-木をなし、3 成分は図 5 の節点 a, b, c にそれぞれつながるので、これらを  $T(a), T(b), T(c)$  で表す。 $T(a), T(b), T(c)$  のうちのいくつかは枝を含まず 1 点のみから成り立つこともある。フェーズ 2 で  $W_2$  が補木となることから、 $S_\beta$  は  $T(b)$  の点と  $T(c)$  の点を結ぶことになる。同様なことは、 $N_2$  についても言える。

定理 1 より

**定理 2:** スイッチの個数は偶数で、各フェーズにおいて半数が ON、残りの半数が OFF でなければならない。すなわち、

$$\|\hat{S}\| = \|\hat{S}\| \quad \text{すなわち、} k_1 = \frac{k}{2} \quad (9)$$

**証明)** 節点の総数を  $n_0$  とし、スイッチを簡単のため 1 個と

する。

$$\text{スイッチが ON のとき } |T| = n_0 - 1 = |C| + |E| + 2 \quad (10)$$

$$\text{スイッチが OFF のとき } |T| = n_0 - 2 = |C| + |E| + 2 \quad (11)$$

ここで数値 “2” は、 $W_i (i = 1, 2, 3)$  のうちの二つが木枝であるからである。式 (10) と (11) は矛盾するので、結局、スイッチは 1 個では不可であることが分かる。一般の個数  $k$  の場合にも同様な議論が出来、補題が成り立つことが分かる。

仮定 7 より、

**補題 5:** 部分グラフ  $N_1$  中の ON スイッチと OFF スイッチの個数の差は高々 1 個である。

この証明も、補題 5 の証明と同様に出来る。

**仮定 8:** スイッチは 1 対とする。

**仮定 9:** スイッチの 1 個は  $N_1$  にあり、他のは 1 個は  $N_2$  にあるとする。

図 5 より次のことも直ちに分かる。

**補題 6:**

フェーズ 1 ( $S_\alpha$ :ON;  $S_\beta$ :OFF) において:

- 1)  $W_1$  の基本カットセットには  $S_\beta$  は含まれない。
- 2)  $W_2$  の基本カットセットは  $S_\beta$  を含む。
- 3)  $S_\alpha$  の基本カットセットは  $W_3$  を含む。

フェーズ 2 ( $S_\alpha$ :OFF;  $S_\beta$ :ON) において:

- 4)  $W_1$  の基本カットセットには  $W_2$  は含まれない。
- 5)  $S_\beta$  の基本カットセットには  $W_2$  が含まれる。
- 6)  $W_3$  の基本カットセットには  $S_\alpha$  が含まれる。

### 2.3 フェーズ 1 での解析

本稿では主として基本カットセット行列を用いて解析する。回路は二つのフェーズをもつので、フェーズ 2 には諸量にダッシュ ( $\prime$ ) を付けて区別する。例えば、フェーズ 1 及びフェーズ 2 における木をそれぞれ、 $T, T'$  で表し、基本カットセット行列を  $C_f, C'_f$  で表すなどである。

$G$  の木  $T$  を  $\{C, E, W_1, W_2, S_\alpha\}$  にとると、この木に関する基本カットセット行列  $C_f$  は次のように表される。

$$C_f = \begin{matrix} & C & E & W_1 & W_2 & S_\alpha & W_3 & S_\beta & L & R_o \\ \begin{matrix} C \\ E \\ W_1 \\ W_2 \\ S_\alpha \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & C_{c3} & C_{c\beta} & C_{cl} & C_{cr} \\ & 1 & & & C_{e3} & C_{e\beta} & C_{el} & C_{er} \\ & & 1 & & C_{13} & C_{1\beta} & C_{1l} & C_{1r} \\ & & & 1 & C_{23} & C_{2\beta} & C_{2l} & C_{2r} \\ & & & & 1 & C_{\alpha3} & C_{\alpha\beta} & C_{\alpha l} & C_{\alpha r} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

仮定 6 より、

$$C_{cr}^T = [0, 0, \dots, 0, 1]$$

$$C_{\alpha r} = C_{er} = C_{1r} = C_{2r} = 0 \quad (13)$$

さらに、回路の形から、すなわち、図 4 の電源側の成分  $N_1$  と負荷側の成分  $N_2$  が分かれていることから、 $N_1$  の木枝に関する基本カットセットには  $N_2$  の補木枝は入らないし、逆もそうである。したがって、

$$C_{e3} = 0, C_{13} = 0, C_{23} = 0, C_{\alpha\beta} = 0 \quad (14)$$

さらに、補題6から次のことが成り立つ ( $S_\alpha, S_\beta$  の向きは次式を満たすように決めることが出来る。

$$C_{1\beta} = 0, C_{2\beta} = 1, C_{\alpha 3} = 1, \quad (15)$$

これらを入れて式 (12) を書き直すと

$$C_f = \begin{matrix} & C & E & W_1 & W_2 & S_\alpha & W_3 & S_\beta & L & R_o \\ \begin{matrix} C \\ E \\ W_1 \\ W_2 \\ S_\alpha \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & C_{c3} & C_{c\beta} & C_{cl} & C_{cr} \\ & 1 & & & 0 & C_{e\beta} & C_{el} & 0 \\ & & 1 & & 0 & 0 & C_{1l} & 0 \\ & & & 1 & 0 & 1 & C_{2l} & 0 \\ & & & & 1 & 1 & 0 & C_{\alpha l} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (16)$$

したがって閉路行列  $B_f$  は

$$B_f = \begin{matrix} & C & E & W_1 & W_2 & S_\alpha & W_3 & S_\beta & L & R_o \\ \begin{matrix} W_3 \\ S_\beta \\ L \\ R_o \end{matrix} & \begin{bmatrix} -C_{c3}^T & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -C_{e\beta}^T & -C_{e\beta}^T & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -C_{cl}^T & -C_{cl}^T & -C_{1l}^T & -C_{2l}^T & -C_{\alpha l}^T & 0 & 0 \\ -C_{cr}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (17)$$

$$v = \begin{bmatrix} v_c \\ v_e \\ v_1 \\ v_2 \\ v_\alpha \\ v_3 \\ v_\beta \\ v_l \\ v_r \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} i_c \\ i_e \\ i_1 \\ i_2 \\ i_\alpha \\ i_3 \\ i_\beta \\ i_l \\ i_r \end{bmatrix} \quad (18)$$

回路方程式は次式で与えられる。

$$\text{KCL: } C_f i = 0 \quad (19)$$

$$\text{KVL: } B_f v = 0 \quad (20)$$

素子特性

$$C: v_c = C \frac{dv_c}{dt} \quad (21)$$

$$S_\alpha: v_\alpha = 0 \quad (22)$$

$$E: v_e = E \quad (23)$$

$$S_\beta: i_\beta = 0 \quad (24)$$

$$L: v_l = L \frac{di_l}{dt} \quad (25)$$

$$R_o: v_r = R_o i_r \quad (26)$$

$$\text{IT: } \begin{cases} v_1 : v_2 : v_3 = 1 : n : 1 \\ i_1 + ni_2 + i_3 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

まず KVLV について述べる。

式 (39) に式 (37)(36) を代入し、式 (41) より  $v_\alpha = 0$  であるから、 $B_f$  の第 5 列を削除すると

$$B_f = \begin{matrix} & C & E & W_1 & W_2 & W_3 & S_\beta & L & R_o \\ \begin{matrix} W_3 \\ S_\beta \\ L \\ R_o \end{matrix} & \begin{bmatrix} -C_{c3}^T & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -C_{e\beta}^T & -C_{e\beta}^T & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -C_{cl}^T & -C_{cl}^T & -C_{1l}^T & -C_{2l}^T & -C_{\alpha l}^T & 0 & 0 \\ -C_{cr}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (28)$$

式 (39) における  $W_i$  の電圧  $v_i (i = 1, 2, 3)$  の間には式 (27) の関係があるので、 $v_1 = v_3, v_2 = nv_3$  を代入すると、 $v_1, v_2$  が容

易に消去できるが、ここでは行列の演算の形で書いている。

$T_0$  を次のように定義する。

$$T_0 = U_2 + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 1 & -n \\ & & 1 \end{bmatrix} + U_3 \quad (29)$$

ここで、 $U_k$  は  $k$  次の単位行列である。

$$T_0^{-1} = U_2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 & n \\ & & 1 \end{bmatrix} + U_3 \quad (30)$$

式 (48) の係数行列とベクトルの間に  $T_0^{-1}T_0$  を挿入し、 $T_0$  とベクトルとの積は、変成器の特性式 (46) を用いると

$$T_0 \text{ とベクトルとの積} = \begin{bmatrix} v_c^T & v_e^T & 0^T & 0^T & v_3^T & v_\beta^T & v_l^T & v_r^T \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

また式 (36) に右から  $T_0^{-1}$  を掛けると、 $W_3$  の列だけが次のように変わる。

$$W_3 \text{ の列} = (W_3 \text{ の列}) + n \times (W_3 \text{ の列}) + W_3 \text{ の列} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_{c3}^T \\ -C_{e\beta}^T \\ -C_{cl}^T \\ 0 \end{bmatrix} + n \times \begin{bmatrix} 0 \\ -C_{c3}^T \\ -C_{e\beta}^T \\ -C_{cl}^T \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left( = \begin{bmatrix} 1 \\ C_{c3}^T \\ C_{e\beta}^T \\ C_{cl}^T \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (32)$$

式 (51) の第 3,4 要素は 0 であるから、式 (48) の係数行列の第 3,4 列を削除すると、式 (48) は次のようになる。

$$\begin{matrix} & C & E & W_* & S_\beta & L & R_o \\ \begin{matrix} W_3 \\ S_\beta \\ L \\ R_o \end{matrix} & \begin{bmatrix} -C_{c3}^T & 0 & 1 \\ -C_{e\beta}^T & -C_{e\beta}^T & C_{* \beta} \\ -C_{cl}^T & -C_{cl}^T & C_{* l} \\ -C_{cr}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} v_c \\ E \\ v_3 \\ v_\beta \\ v_l \\ v_r \end{bmatrix} = 0 \quad (33)$$

ここで

$$C_{* \beta}^T = -C_{1\beta}^T + n(-C_{2\beta}^T) + 0 (= -n)$$

$$C_{* l}^T = -C_{1l}^T + n(-C_{2l}^T) + 0 \quad (34)$$

式 (75) で第 2 式は変数  $v_\beta$  を定める式であり、他の式には影響を与えないので、削除して考えて良い。したがって、

$$\begin{matrix} & C & E & W_* & L & R_o \\ \begin{matrix} W_3 \\ L \\ R_o \end{matrix} & \begin{bmatrix} -C_{c3}^T & 0 & 1 \\ -C_{cl}^T & -C_{cl}^T & C_{* l}^T \\ -C_{cr}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} v_c \\ E \\ v_3 \\ v_l \\ v_r \end{bmatrix} = 0 \quad (35)$$

これから、

$$-\begin{bmatrix} C_{c3}^T \\ C_{cl}^T \end{bmatrix} v_c - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_r \end{bmatrix} = 0 \quad (36)$$

$$-C_{cl}^T v_c - C_{el}^T E + \begin{bmatrix} C_{* l}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_r \end{bmatrix} + v_l = 0 \quad (37)$$

これと式 (25)(32)(34) より、

$$L \frac{di_l}{dt} = \left\{ C_{cl}^T - \begin{bmatrix} C_{1l}^T + nC_{2l}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{c3}^T \\ C_{cl}^T \end{bmatrix} \right\} v_c + C_{el}^T E \quad (38)$$

以上でフェーズ 1 における KVL の定式化が終わった。

次に、フェーズ 1 における KCL について検討する。方法は KVL の場合とほぼ同じであるが、IT の電圧の間の関係の代わ

りに今度は電流の間の関係が式 (27) で与えられているところが異なる。しかし途中の計算をすべて省き、結果だけを示すと次のようになる。

$$C \frac{dv_c}{dt} = - \left\{ C_{cl}^T + \begin{bmatrix} C_{c3}^T & nC_{c3}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1l}^T \\ C_{2l}^T \end{bmatrix} \right\} i_l - C_{cl}^T i_r \quad (39)$$

$$i_r = \frac{1}{R_o} v_r, \quad v_c = C_{cr}^T v_c \quad (40)$$

を代入すると、最終的な KCL が求まる。

式 (39) と (38) を纏めると、フェーズ 1 における状態方程式が次のように求まる。

$$\begin{bmatrix} L \frac{di_l}{dt} \\ C \frac{dv_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H^T \\ -H & -\frac{1}{R_o} C_{cr} C_{cr}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_l \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{cl}^T \\ 0 \end{bmatrix} E \quad (41)$$

$$H = C_{cl} + C_{c3}(C_{1l} + nC_{2l}) \quad (42)$$

## 2.4 フェーズ 2 での解析

フェーズ 2 では、木  $T'$  として  $\{C, E, W_1, W_3, S_\beta\}$  をとり、同様に

$$C_f' = \begin{matrix} & C & E & W_1 & W_2 & S_\alpha & W_3 & S_\beta & L & R_o \\ \begin{matrix} C \\ E \\ W_1 \\ W_3 \\ S_\beta \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{c2}' & C_{c\alpha}' & & & & & C_{cl}' & C_{cr}' \\ C_{e2}' & C_{e\alpha}' & & & & & C_{el}' & C_{er}' \\ C_{12}' & C_{1\alpha}' & & & & & C_{1l}' & C_{1r}' \\ C_{32}' & C_{3\alpha}' & 1 & & & & C_{3l}' & C_{3r}' \\ C_{\beta 2}' & C_{\beta\alpha}' & & 1 & & & C_{\beta l}' & C_{\beta r}' \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (43)$$

$$C_{e3}' = 0, C_{13}' = 0, C_{23}' = 0, C_{\alpha\beta}' = 0 \quad (44)$$

さらに、補題 6 から次のことが成り立つ。

$$C_{1\beta} = 0, C_{2\beta} = 1, C_{\alpha 3} = 1, \quad (45)$$

同様に、 $C_f'$  についても

$$C_{12}' = 0, C_{\beta 2}' = 1, C_{3\alpha}' = 1, \quad (46)$$

これらを入れて式 (44) を書き直すと

$$C_f' = \begin{matrix} & C & E & W_1 & W_2 & S_\alpha & W_3 & S_\beta & L & R_o \\ \begin{matrix} C \\ E \\ W_1 \\ W_3 \\ S_\beta \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{c2}' & C_{c\alpha}' & & & & & C_{cl}' & C_{cr}' \\ C_{e2}' & 0 & & & & & C_{el}' & 0 \\ & 0 & 0 & & & & C_{1l}' & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & & & C_{3l}' & 0 \\ & 1 & 0 & & 1 & & C_{\beta l}' & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (47)$$

$C_f$  と  $C_f'$  の関係は、周知の方法で変換することにより、次のようになることが分かる。

$$\begin{aligned} C_{c2}' &= -C_{c\beta}, & C_{c\alpha}' &= -C_{c3} \\ C_{cl}' &= C_{cl} - \begin{bmatrix} C_{c3} & C_{c\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\alpha l} \\ C_{2l} \end{bmatrix} \\ C_{e2}' &= -C_{e\beta}, & C_{1l}' &= C_{1l} \\ C_{el}' &= C_{el} - C_{e\beta} C_{2l} \\ C_{3l}' &= C_{\alpha l}, & C_{\beta l}' &= C_{2l} \end{aligned} \quad (48)$$

式 (47) 等を用いて、同様に計算した結果のみを以下に示すと、

$$\begin{bmatrix} L \frac{di_l}{dt} \\ C \frac{dv_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H'^T \\ -H' & -\frac{1}{R_o} C_{cr} C_{cr}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_l \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{cl}'^T \\ 0 \end{bmatrix} E \quad (49)$$

$$H' = C_{cl} - \begin{bmatrix} C_{c3} & C_{c\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\alpha l} \\ C_{2l} \end{bmatrix} - \frac{1}{n} C_{c\beta} [C_{1l} + C_{\alpha l}] \quad (50)$$

$$C_{*l}' = C_{el} - C_{e\beta}(C_{2l} + \frac{1}{n}C_{1l} + \frac{1}{n}C_{\alpha l}) \quad (51)$$

式 (42)、(51) より、

$$H - H' = (C_{c3} + \frac{1}{n}C_{c\beta})(C_{1l} + nC_{2l} + C_{\alpha l}) \quad (52)$$

この形から次の重要な結果が得られる。

**定理 3:** 行列  $H - H'$  のランクは 1

## 2.5 状態平均化方程式

式 (41)、(49) は簡潔に次のように書ける。

$$K\dot{x} = Ax + b \quad (\text{フェーズ 1}) \quad (53)$$

$$K\dot{x} = A'x + b' \quad (\text{フェーズ 2}) \quad (54)$$

ここで

$$K = L + C = \text{diag}[L_1, \dots, L_m, C_1, \dots, C_n] \quad (55)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & H^T \\ -H & -\frac{1}{R_o} C_{cr} C_{cr}^T \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & H'^T \\ -H' & -\frac{1}{R_o} C_{cr} C_{cr}^T \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$b = \begin{bmatrix} C_{cl} & 0 \end{bmatrix}^T E \quad (58)$$

$$b' = - \begin{bmatrix} C_{el} - C_{e\beta}(C_{2l} + \frac{1}{n}C_{1l} + \frac{1}{n}C_{\alpha l}), & 0 \end{bmatrix}^T E \quad (59)$$

時比率  $d, d'$  は次式を満たす。

$$1 \geq d \geq 0, \quad 1 \geq d' \geq 0, \quad d + d' = 1 \quad (60)$$

**仮定 10:** 1 周期における電圧・電流の変化は小さい。  
仮定 10 のもとで次の状態平均化方程式が得られる。

$$K \frac{dx}{dt} = \bar{A}x + \bar{b} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= dA + d'A' \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (dH + d'H')^T \\ -(dH + d'H') & -\frac{1}{R_o} (dC_{cr}C_{cr}^T + d'C_{cr}C_{cr}^T) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \bar{b} &= db + d'b' \\ &= - \begin{bmatrix} dC_{cl}^T + d'C_{*l}'^T \\ 0 \end{bmatrix} E \quad \left( \equiv - \begin{bmatrix} b_e \\ 0 \end{bmatrix} E \right) \end{aligned} \quad (63)$$

$$\bar{H} \equiv dH + d'H' \quad (64)$$

$$\bar{b}_e \equiv \quad (65)$$

## 2.6 平均化方程式の定常解

(61) の定常解は、 $dx/dt = 0$  より

$$\bar{A}x + \bar{b} = 0 \quad (66)$$

を解いて求まる。特に、 $v_{out}$  ( $\equiv v_{C_{m_c}}$  ( $x$  の最後の要素) は

$$v_{out} = \left| \begin{bmatrix} 0 & \overline{H^T}^* & b_e^T \\ -\bar{H} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| / |\bar{A}| \quad (67)$$

$$= \frac{|\overline{H^T}^* \quad b_e^T|}{|\bar{H}|} \quad (68)$$

ここで  $\overline{H^T}_*$  は  $\overline{H^T}$  の最後の列を削除して得られた行列 ( $\overline{H^T}_*$  は  $\overline{H}$  の最後の行を削除して得られた行列の転置) である。

補題 7:  $|\bar{A}| \neq 0$  のためには

$$m_L = m_C \quad (69)$$

が必要である。すなわち、回路中のインダクタンスの個数とキャパシタンスの個数は等しい (証明略)。

定理 3 を用いると  $v_{out}$  が次のように表されることが分かる。

$$v_{out} = \frac{d\delta + d'\delta'}{d\gamma + d'\gamma'} \quad (70)$$

$$\gamma = |H^T| = |H| \quad (71)$$

$$\gamma' = |\overline{H^T}| = |\overline{H}| \quad (72)$$

$$\delta = |\overline{H^T}_* b_e| = \left| \begin{bmatrix} H_* \\ b_e \end{bmatrix} \right| \quad (73)$$

$$\delta' = |\overline{H^T}_* b_e| = \left| \begin{bmatrix} \overline{H}_* \\ b_e \end{bmatrix} \right| \quad (74)$$

### 3. 回路構造上の条件

式 (71) の  $\gamma$  は次のように書き直すことが出来る。

$$\gamma = |H| = |C_{cl} + C_{c3}(C_{1l} + nC_{2l})| \quad (75)$$

$$= \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} \\ C_{1l} + nC_{2l} & -1 \end{vmatrix} \quad (76)$$

$$= \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} \\ C_{1l} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} \\ nC_{2l} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (77)$$

式 (77) 最右辺の各項は基本カットセット行列  $C_f$  (16) の小行列式となっており、グラフの意味をもつ。例えば、[7] [8] [10] 等で述べた要領である。

式 (17) を参照すると、式 (77) の各項については次のことが分かる。

補題 7: 式 (77) の第 1 項はグラフ  $G(E, W_2, ; S_\beta, R_o)$  の基本カットセット行列の主要部の行列式であり、したがってその値は 0, 1, -1 のいずれかをとり、特に、これが  $\pm 1$  となるのは、 $G(E, W_2; S_\beta, R_o)$  において  $\{C, W_1\}$  と  $\{L, W_3\}$  が対木構造となることである。

同様に第 2 項は、グラフ  $G(E, W_2; S_\beta, R_o)$  のそれに対応し、さらに、第 3 項は  $G(E, W_1, W_2; W_3, S_\beta, R_o)$  に対応する。上記のことで、値が 1 となるか -1 となるかは注意を要するが、システマティックに調べればそれほど難しいことではない。

同様に  $\gamma'$  に対しても次式が得られる。

$$\gamma' = |\overline{H}| = \begin{vmatrix} C_{cl} - \begin{bmatrix} C_{c3} & C_{c\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\alpha l} \\ C_{2l} \end{bmatrix} \\ -\frac{1}{n} C_{c\beta} [C_{1l} + C_{\alpha l}] \end{vmatrix} \quad (78)$$

$$= \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} & C_{c\beta} - \frac{1}{n} C_{c\beta} \\ C_{\alpha l} & 1 & 0 \\ C_{1l} + C_{2l} & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (79)$$

$$= \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} & C_{c\beta} \\ C_{\alpha l} & 1 & 0 \\ C_{1l} & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (80)$$

$$+ \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} & C_{c\beta} \\ C_{\alpha l} & 1 & 0 \\ C_{2l} & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (81)$$

$$- \frac{1}{n} \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} & C_{c\beta} \\ C_{\alpha l} & 1 & 0 \\ C_{1l} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (82)$$

$$- \frac{1}{n} \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} & C_{c\beta} \\ C_{\alpha l} & 1 & 0 \\ C_{2l} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (83)$$

式 (80)~(83) も、式 (17) と比較すると、補題 7 と同様な解釈が出来る。 $\delta, \delta'$  についても同様である。

もしも例えば出力特性  $v_{out} = k(d'/d)E$  ( $k$  は定数) の昇降圧形コンバータを得ようとすれば、 $\gamma \neq 0, \delta' \neq 0, \gamma' = \delta = 0$  となる条件を求めればよい。

本原稿では紙数の関係で詳細は述べられないが、具体例は研究会で発表する。

## 4. あとがき

本稿では、変成器を含む簡単な DC-DC コンバータについて考察した。回路構造に関する簡単な判定条件は与えていないが方法としては、以前発表した結果などから、導き出せる。

## 5. 謝 辞

本研究の遂行に当たって、文部科学省科学研究費補助金基盤研究 (C)(2) 16560339 からの助成を受けた。著者の一人は、科学技術振興機構 (JST) 及び戦略的創造研究推進事業 (CREST) の援助を受けた。

## 文 献

- [1] 原田耕介, ニノ宮保, 顧文建, スイッチングコンバータの基礎 コロナ社, 1992
- [2] 鈴木雅臣, トランジスタ回路の設計, CQ 出版社, 1992
- [3] 鈴木雅臣, 続トランジスタ回路の設計, CQ 出版社, 1992
- [4] Marian K. Kazimierczuk, "Dynamic Performance of PWM DC-DC Boost Converter with Input Voltage Feedforward Control," IEEE Trans. Circuit Syst, Vol.46, NO.12 pp.147: 1481 Dec 1999
- [5] Dariusz Czarkowski and Marian K. Kazimierczuk, "Linear Circuit Models of PWM Flyback and Buck/Boost Converters," IEEE Trans. Circuit Syst, Vol.39, NO.8 pp.688-693 Aug 1992
- [6] 伊理正夫, 演習グラフ理論: 基礎と応用, コロナ社, 1983
- [7] T. Nishi, T. Ogishima, and M. Ogata, "Topological conditions on switched mode dc-dc converters," Proc. of ITCCSCC'02,
- [8] M. Ogata and T. Nishi, "Topological criteria for switched mode dc-dc converters," Proc. of ISCAS2003
- [9] M. Ogata and T. Nishi, "Topological conditions for 4-switch DC-DC converters," Proc. Int. Sympto. on Information Science and Electrical Engineering 2003
- [10] M. Ogata and T. Nishi, "Graph-Theoretic Approach to the Design of Four-Switch DC-DC Converters," Proc. of ISCAS2005
- [11] 西哲生, 荻島敬司, 緒方将人, "A consideration on the circuit structure of switching source スイッチング電源の回路構造に関する考察", 信学技報, 2003.
- [12] 緒方将人, 西哲生, "On the topological criteria for network to be DC-DC converters", DC-DC コンバータの回路構造に基づく判別法に関する一検討", 信学技報, 2004.

# SAW 素子とインダクタからなる対称形 SAW フィルタの 集中定数回路モデルを用いる一設計法

西 哲生<sup>†</sup> 駒崎 友和<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 早稲田大学理工学部 〒169-0072 東京都新宿区大久保 2-4-12

<sup>††</sup> 駒崎回路研究所 〒350-0015 埼玉県川越市今泉 86-23

E-mail: <sup>†</sup>nishi-t@waseda.jp, <sup>††</sup>tomoka@wonder.ocn.ne.jp

あらまし 本稿では、集中定数回路モデルで表された SAW 素子とインダクタンスからなる対称形 SAW フィルタの設計について、特に、インダクタンスを挿入することによる効果、減衰極の変化などについて考察する。

キーワード 対称形 SAW フィルタ, インダクタンス, 集中定数モデル

## A Design of Symmetrical SAW Filters Composed of Lumped-constant Modelled SAW Elements and Some Inductances

Tetsuo NISHI<sup>†</sup> and Tomokazu KOMAZAKI<sup>††</sup>

<sup>†</sup> Faculty of Science Engineering, Waseda University Okubo 2-4-12, Shinjuku-ku, Tokyo, 169-0072 Japan

<sup>††</sup> Komazaki Circuit Laboratory, Imaizumi 86-23, Kawagoe-shi, 350-0015 Japan

E-mail: <sup>†</sup>nishi-t@waseda.jp, <sup>††</sup>tomoka@wonder.ocn.ne.jp

**Abstract** We consider a method of design of a symmetrical SAW filters composed of lumped-constant modelled SAW elements and lumped inductances. We show effects on the attenuation poles and attenuation zeros.

**Key words** symmetrical SAW filter, inductance, lumped-constant model

### 1. ま え が き

最近の携帯端末用アンテナ分波器 (duplexer) は通常 SAW フィルタで実現される。SAW フィルタの一つの典型的な構成は、図 1 のように、SAW 素子のはしご形回路として実現される。ここで、SAW 素子は図 2(a) の記号で表され、その集中定数等価回路は図 (b) で表される。図 (b) における抵抗は SAW 素子の損失を表す。

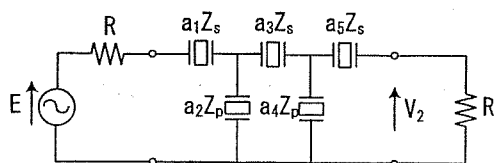


図 1 SAW フィルタの例

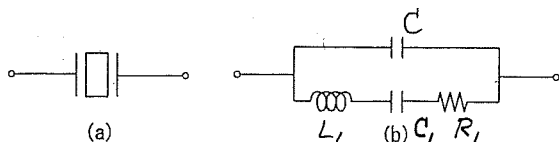


図 2 SAW 素子の記号 (a) とその集中定数等価回路 (b)

SAW 素子は超音波の機械的振動を利用しており、その動作は分布定数素子として表されるべきであるから、図 2 のような簡単なモデル化での設計の適否については別途検討すべきであるが、図 2(b) に基づく設計法の検討も必要である。

図 2(b) の等価回路は簡単とはいえ図 1 の回路に対する関数論的設計をするには複雑すぎ、実現可能な特性やその設計法などは解明されているとは言い難い [1]-[7]。

一方、昨今の実際の設計・製造においては、減衰域での特性改善のため、図 1 の SAW はしご形回路ではなく、これに集中定数素子のインダクタンスを挿入した図 3, 4 などの回路が用いられる。この場合には、図 2(b) の等価回路を用いないとすると回路は分布・集中混在形となり設計はさらに困難となる。この意味でも図 2(b) の集中定数モデルで考える意義がある。

図 4 では SAW 素子が 5 個の場合を描いているが、実際には 10 素子程度まで使われている。したがって図 2(b) を用いると、パラメータが十数個程度の回路設計であるから最適化手法を用いた設計も可能であるが、出来れば解析的設計が望まれる。

アンテナ分波器は送信側フィルタと受信側フィルタが一体となっており、それらの通過域帯が近接して配置されている。その設計仕様は国内用・アメリカ用・ヨーロッパ用、また方式の



違いなどにより種々存在する。例えば米国の CDMA 方式では、送信側の通過帯域は 824~849MHz、受信側の通過帯域が 869~894MHz、また日本の CDMA 方式では送信、受信側の通過帯域が 887~925MHz、832~870MHz である。したがって米国の CDMA 方式では、送信側フィルタの高域側減衰域は受信側フィルタの通過域でもあるため必要な減衰量は非常に大きく、低域側については特に規定はされていない。受信側フィルタでは逆に低域側の必要な減衰量が大きく高域側は規定されていない。このように、非対称な減衰特性の実現が要求される。これらの各種のフィルタ設計に対応するためにも、設計指針が望まれる。

本稿では簡単のため

仮定 1: 回路は対称とする。

この仮定により 2 等分定理が適用でき、解析が容易になる。

本稿では、SAW 素子からなる回路に図 3, 4 に示すような、インダクタンスを挿入することによる特性の変化、特に減衰極の変化について詳細に検討する。

## 2. 準備

### 2.1 本稿で検討する回路形

本稿ではまず、SAW 素子 3 個または 5 個と  $\pi$  形のインダクタンスからなる図 3, 4 について検討する。図の  $\pi$  形のインダクタンス  $L_1, L_2(=L_1), L_3$  は Y- $\Delta$  変換により、Y 形回路  $L_{Y1}, L_{Y2}(=L_{Y1}), L_{Y3}$  に変換できる。後の検討から直ぐに分かるが、 $L_{Y1}, L_{Y3}$  の効果には明確な違いがある。図 3, 4 の ( $\pi$  形インダクタンスを Y 形に置き換えた) 回路をそれぞれ “SAW3 フィルタ”、“SAW5 フィルタ” と呼ぶことにする。図 5 にはインダクタンス挿入前の SAW3, SAW5 フィルタの特性を示す。

### 2.2 2 等分定理

Bartlett の 2 等分定理は周知の定理であるが、本稿の解析の基本であるので一応書いておく。

図 6(a) のような構造的対称な 2 ポートについて考える。この 2 ポートをインピーダンス行列で表すと

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{12}I_1 + z_{11}I_2 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで

$$I_1 = I_2 = I \quad (2)$$

とすると、回路の構造的対称性により、明らかに図 6 (a) の中央の水平枝の電流は 0 となり、したがって中央の点線のところで切り離しても動作は変わらない。一方、式 (1), (2) より、

$$V_1 = z_{11}I + z_{12}I = (z_{11} + z_{12})I \quad (3)$$

これから、図 6(a) の半区間 (図 6(b)) の点線のところを開放した回路の入力インピーダンス  $z_{fr}$  は

$$z_{fr} \equiv \frac{V_1}{I} = z_{11} + z_{12} \quad (4)$$

で与えられる。また、式 (2) の代わりに

$$I_1 = -I_2 = I \quad (5)$$

とすると、水平枝の電位がすべて等しくなるので、これらの枝を短絡しても動作は変わらない。一方、図 6(b) で点線部分を短絡した回路の入力インピーダンス  $z_{sh}$  は、式 (1), (5) より、

$$z_{sh} \equiv \frac{V_1}{I} = z_{11} - z_{12} \quad (6)$$

添字  $fr, sh$  は “free”, “short” の意味に用いている。

式 (4), (6) より、

$$z_{11} = \frac{1}{2}(z_{fr} + z_{sh}) \quad (7)$$

$$z_{12} = \frac{1}{2}(z_{fr} - z_{sh}) \quad (8)$$

ついでながら、図 6 では中央部分は水平枝のみであるが、水平枝と交叉枝が混在する場合にも拡張することができる。ただしこれに関しては多くの著書でごく簡単にしか触れられてなく、また間違った記述も見受けられる。Belevitch[10] にはかなり正

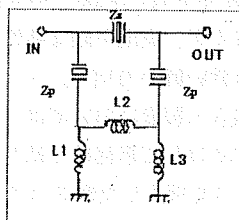


図 3 SAW3 フィルタ

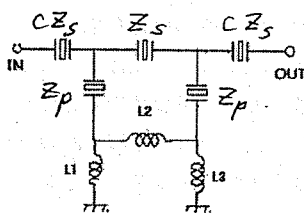


図 4 SAW5 フィルタ

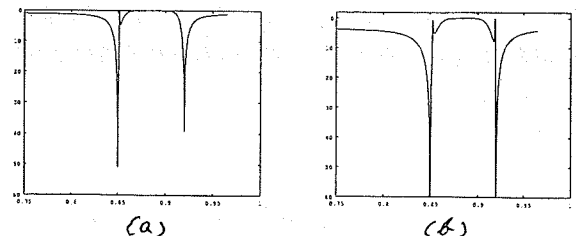


図 5 インダクタンス挿入前の SAW3 及び SAW5 フィルタ特性例

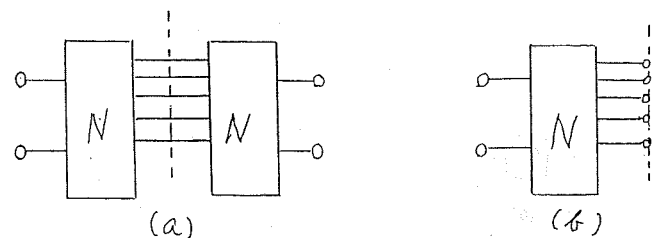


図 6 2 等分定理

確に述べられているが、説明にはすっきりしない点もある。なお、2等分定理は  $2n$  ポートの場合もそのまま拡張できる。

上記の2等分定理を SAW フィルタの場合に適用すると、SAW3 の場合、図6の半区間に相当する回路は図7のようになり、点線部分を開放すると  $z_{fr}$  が得られ、短絡すると  $z_{sh}$  が得られる。すなわち、

$$z_{fr} = z_{11} + z_{12} = z_p + L_{Y1}s + 2L_{Y3}s \quad (9)$$

$$\begin{aligned} z_{sh} = z_{11} - z_{12} &= \frac{\frac{1}{2}z_s(z_p + L_{Y1}s)}{\frac{1}{2}z_s + (z_p + L_{Y1}s)} \\ &= \frac{z_s(z_p + L_{Y1}s)}{z_s + 2(z_p + L_{Y1}s)} \end{aligned} \quad (10)$$

図の形から

$$\tilde{z}_p \equiv z_p + L_{Y1}s \quad (11)$$

とおいておくと、記述が次のように少し簡単になる。

$$z_{fr} = \tilde{z}_p + 2L_{Y3}s \quad (12)$$

$$z_{sh} = \frac{z_s \tilde{z}_p}{z_s + 2\tilde{z}_p} \quad (13)$$

SAW5 の場合も同様な式を得るが、必要なときに述べる。

式(11)、(12)から  $L_{Y1}$  と  $L_{Y3}$  の効果が異なることが分かる。

### 2.3 動作伝送関数

2ポートの  $S$  行列を  $S = [s_{ij}]$  とする。

$$S = (Z - 1)(Z + 1)^{-1} \quad (14)$$

であるから、

$$s_{21} = \frac{2z_{21}}{|Z| + z_{11} + z_{22} + 1} \quad (15)$$

この式は2ポートが損失を含む場合にも成り立つ一般的な式である。式(4)-(15)を用い、 $s_{21}$  を  $z_{fr}$ 、 $z_{sh}$  で表すと、

$$\begin{aligned} s_{21} &= \frac{2z_{21}}{|Z| + z_{11} + z_{22} + 1} = \frac{2z_{21}}{z_{11}^2 - z_{12}^2 + 2z_{11} + 1} \\ &= \frac{z_{fr} - z_{sh}}{z_{sh}z_{fr} + z_{sh} + z_{fr} + 1} \\ &= \frac{z_{fr} - z_{sh}}{(1 + z_{sh})(1 + z_{fr})} \end{aligned} \quad (16)$$

となる。この式が解析の基礎となる。

### 2.4 周波数特性

まず、SAW 素子が損失を含まない場合、すなわち2ポートがリアクタンス回路の場合について詳しく検討する。この場合

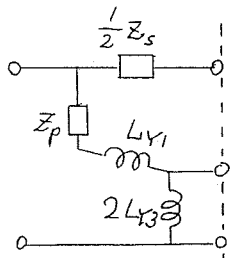


図7 SAW3 に対する2等分定理の半区間

には  $s = j\omega$  においては  $z_s(s)$ 、 $z_p(s)$ 、 $z_{sh}(s)$ 、 $z_{sh}(s)$  などはいずれも純虚数であるから、これらを

$$z_s(j\omega) = jx_s(\omega), \quad z_p(j\omega) = jx_s(\omega) \quad (17)$$

$$z_{sh}(j\omega) = jx_{sh}(\omega), \quad z_{fr}(j\omega) = jx_{fr}(\omega) \quad (18)$$

とおく。このとき、

$$|s_{21}(j\omega)|^2 = \frac{[x_{fr}(\omega) - x_{sh}(\omega)]^2}{[1 + x_{sh}^2(\omega)][1 + x_{fr}^2(\omega)]} \quad (19)$$

したがって、

$$\frac{1}{|s_{21}(j\omega)|^2} = 1 + \left[ \frac{x_{sh}(\omega)x_{fr}(\omega) - 1}{x_{fr}(\omega) - x_{sh}(\omega)} \right]^2 \quad (20)$$

$$y(\omega) \equiv \frac{x_{sh}(\omega)x_{fr}(\omega) - 1}{x_{fr}(\omega) - x_{sh}(\omega)} \quad (21)$$

とおくと、

$$\frac{1}{|s_{21}(j\omega)|^2} = 1 + y^2 \quad (22)$$

となり、 $y$  はフィルタの特性関数となる。

### 2.5 SAW 素子の $Q$

SAW 素子は図2(b)に示すように現実には小さな損失を含み、例えば  $Q = 800$  とされる。損失は小さいので、損失分の抵抗を図2(b)のように入れる代わりに、 $L_1$ 、 $C_1$ 、 $C$  の共振回路に直列に抵抗  $R_{ser}$  を入れて表現することも出来るし、並列に抵抗  $R_{para}$  を入れて表現することも出来る。ここでは、共振回路に直列に抵抗  $R_{ser}$  を入れて表現することにし、 $Q$  と  $R_{ser}$  の関係を求めておく。

図2(b)のリアクタンス部(抵抗を短絡した回路)のインピーダンスを  $z(j\omega)$  とし、回路に電圧  $E$  を加えると、

$$I = \frac{E}{z + R_{ser}} = \frac{E}{\frac{1 - \omega^2 L_1 C_1}{j\omega C(1 - \omega^2 L_1 C_1) + j\omega C_1} + R_{ser}} \quad (23)$$

したがって、 $|I|$  は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (24)$$

において極大値  $|I|_{max} = E/R_{ser}$  をとる。

$Q$  を求めるために、 $\omega = \omega_0$  の近傍で上の  $z(j\omega)$  を

$$z(j\omega) = j\omega \hat{L} + \frac{1}{j\omega \hat{C}} \quad (25)$$

の形にすると分かり易い。ここで、

$$\frac{1}{\hat{L}\hat{C}} = \omega_0^2 \left( = \frac{1}{L_1 C_1} \right) \quad (26)$$

であり、 $\hat{L}$ 、 $\hat{C}$  は  $\omega = \omega_0$  の近傍では急激には変化しない  $\omega$  の関数である。

$z(j\omega)$  を式(25)の形にするのは簡単で、

$$\begin{aligned} z(j\omega) &= \frac{1 - \omega^2 L_1 C_1}{j\omega C(1 - \omega^2 L_1 C_1) + j\omega C_1} \\ &= \frac{j\omega C_1}{j\omega C(1 - \omega^2 L_1 C_1) + j\omega C_1} \left[ j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right] \\ &= \frac{C_1}{C(1 - \omega^2 L_1 C_1) + C_1} \left[ j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

したがって、 $\hat{L}$ ,  $\hat{C}$  は次のようになる。

$$\hat{L} = \frac{L_1 C_1}{(C + C_1) - \omega^2 L_1 C_1 C}, \quad \hat{C} = (C + C_1) - \omega^2 L_1 C_1 C \quad (28)$$

$Q$  は

$$Q = \left. \frac{\omega_0 \hat{L}}{R_{ser}} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (29)$$

で与えられるので、結局

$$\begin{aligned} R_{ser} &= \frac{\omega_0 \hat{L}}{Q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \cdot L_1 \cdot \frac{C_1}{C_1 + C - \omega^2 L_1 C_1 C}}{Q} \\ &= \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \end{aligned} \quad (30)$$

以上は直列抵抗  $R_{ser}$  を用いる場合であったが、並列抵抗  $R_{para}$  を採用する場合も同様に計算できる。

### 3. インダクタンス挿入の影響の検討

$z_s(s)$  及び  $z_p(s)$  は図 2 の形から次のように書ける。

$$z_s(s) = k_s \frac{s^2 + \gamma}{s(s^2 + \beta)}, \quad 0 < \gamma < \beta \quad (31)$$

$$z_p(s) = k_p \frac{s^2 + \alpha}{s(s^2 + \gamma)}, \quad 0 < \alpha < \gamma \quad (32)$$

$z_s$  の零点と  $z_p$  の極を等しくしたのは、フィルタ特性としての要請である。また

$$\tilde{z}_p(s) = z_p(s) + L_{Y1}s \equiv L_{Y1} \frac{(s^2 + \tilde{\alpha})(s^2 + \tilde{\delta})}{s(s^2 + \gamma)}, \quad \tilde{\alpha} < \gamma < \tilde{\delta} \quad (33)$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{L_{Y1}\gamma + k_p - \sqrt{(L_{Y1}\gamma - k_p)^2 + 4(\gamma - \alpha)k_p L_{Y1}}}{2L_{Y1}} \quad (34)$$

$$\tilde{\delta} = \frac{L_{Y1}\gamma + k_p + \sqrt{(L_{Y1}\gamma - k_p)^2 + 4(\gamma - \alpha)k_p L_{Y1}}}{2L_{Y1}} \quad (35)$$

である。したがって、

$$x_s(\omega) = -k_s \frac{\gamma - \omega^2}{\omega(\beta - \omega^2)} \quad (36)$$

$$x_p(\omega) = -k_p \frac{\alpha - \omega^2}{\omega(\gamma - \omega^2)} \quad (37)$$

$$\tilde{x}_p(\omega) = x_p(\omega) + L_{Y1}\omega = -L_{Y1} \frac{(\tilde{\alpha} - \omega^2)(\tilde{\delta} - \omega^2)}{\omega(\gamma - \omega^2)} \quad (38)$$

#### 3.1 SAW3 の場合

まず SAW3 フィルタについて、簡単のため、

$$L_{Y1} = 0, \quad L_{Y3} = 0 \quad (39)$$

として検討する。このとき、式 (12), (13), (31), (32) を用いると、 $z_{sh}$ ,  $z_{fr}$  は次のようになる。

$$z_{sh} = \frac{z_s z_p}{z_s + 2z_p}, \quad z_{fr} = z_p \quad (40)$$

これを用いると  $y$  は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\frac{x_s x_p}{x_s + 2x_p} x_p - 1}{x_p - \frac{x_s x_p}{x_s + 2x_p}} = \frac{x_s x_p^2 - x_s - 2x_p}{x_s x_p + 2x_p^2 - x_s x_p} \\ &= \frac{x_s x_p^2 - x_s - 2x_p}{2x_p^2} \end{aligned} \quad (41)$$

式 (41) に式 (36), (37) を代入し整理すると、

$$\begin{aligned} y &= (\gamma - \omega^2) \\ &\times \frac{[-k_s k_p^2 (\alpha - \omega^2)^2 + k_s \omega^2 (\gamma - \omega^2)^2 + 2k_p \omega^2 (\alpha - \omega^2)(\beta - \omega^2)]}{2k_p^2 \omega (\alpha - \omega^2)^2 (\beta - \omega^2)} \end{aligned} \quad (42)$$

式 (42) の分子の [ ] の中を  $y_1$  とおく。すなわち

$$\begin{aligned} y_1(\omega^2) &= -k_s k_p^2 (\alpha - \omega^2)^2 + k_s \omega^2 (\gamma - \omega^2)^2 \\ &\quad + 2k_p \omega^2 (\alpha - \omega^2)(\beta - \omega^2) \end{aligned} \quad (43)$$

$$x \equiv \omega^2 \quad (44)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} y_1 &= (k_s + 2k_p)x^3 - (k_s k_p^2 + 2k_s \gamma + 2k_p \alpha + 2k_p \beta)x^2 \\ &\quad + (2k_s k_p^2 \alpha + k_s \gamma^2 + 2k_p \alpha \beta)x - k_s k_p^2 \alpha^2 \end{aligned} \quad (45)$$

この 3 次多項式は、係数が  $++--$  となっているので正根を 3 個もつ可能性がある。またこの式で  $x$  を  $-x$  で置き換えると、係数が  $++++$  となるので負根をもたないことが分かる。したがって、

$$y_1(x) = 0 \text{ は正根を 3 個もつかまたは正根 1 個と複素根(46)}$$

さらに式 (43) より、

$$y_1(0) = -k_s k_p^2 \alpha < 0 \quad (47)$$

$$y_1(\alpha) = k_s \alpha (\gamma - \alpha)^2 > 0 \quad (48)$$

$$y_1(\gamma) = -k_s k_p^2 (\alpha - \gamma)^2 + 2k_p \gamma (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) < 0 \quad (49)$$

$$\begin{aligned} y_1(\beta) &= -k_s k_p^2 (\alpha - \beta)^2 + k_s \beta (\gamma - \beta)^2 \\ &= -k_s \{k_p^2 (\alpha - \beta)^2 - \beta (\gamma - \beta)^2\} \end{aligned} \quad (50)$$

$$y_1(+\infty) \approx (k_s + 2k_p)x^3 \rightarrow +\infty \quad (51)$$

$y_1(\beta)$  の形からは  $y_1(\beta)$  の正負は分からないが、実際の数値例ではかなりはっきりと負の値になる。

式 (48)-(51) を参考にして  $y_1(x)$  の概略を描くと、図 8 のようになり、この図から結局、(46) は正根 3 個の場合しかないことが分かる。

次のことに注意する。

補題 1: 通過域 (及びこれより低い周波数) では  $|x_s(\omega)| \ll |x_p(\omega)|$  であり、 $L_{Y1}$  の挿入による通過帯域への影響は小さい。

図 8 における  $y_1(x)$  の零点を図のように、 $x_0, x_1, x_2$  とする。補題 1 (と実際の数値例) により  $k_p \gg k_s$  であることに注意して  $x_0, x_1, x_2$  の概略値を求める。式 (43) において  $k_s$  の項を無視

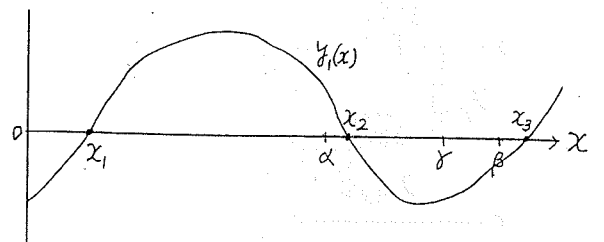


図 8  $y_1$  の概略図

すると

$$y_1(\omega^2) \approx k_s k_p^2 (\alpha - \omega^2)^2 - 2k_p \omega^2 (\alpha - \omega^2)(\beta - \omega^2) \\ = k_p (\alpha - \omega^2) [k_s k_p (\alpha - \omega^2) - 2\omega^2 (\beta - \omega^2)] \quad (52)$$

これらの零点は、 $x = \alpha$  と

$$x = \frac{1}{4} \left\{ 2\beta + k_s k_p \pm \sqrt{(2\beta - k_s k_p)^2 + 8k_s k_p (\beta - \alpha)} \right\} \quad (53)$$

したがって、 $x_0 \approx \alpha$  となり、 $x_1$  と  $x_2$  はほぼ式 (53) で与えられ、 $x_1$  は考察対象の周波数帯域よりもかなり低いところにある、逆に  $x_2$  はかなり高いところにある。

図 8 をもとにして式 (43) の  $y(x)$  ( $= y(\omega^2)$ ) のグラフを描くと図 9 の実線のようになり、周波数特性は図 9 の一点鎖線のようになる。この図からは分かりにくいのが、 $\omega = \sqrt{\alpha}$  が 2 位の減衰極となることは、式 (42) から明らかである。図 8 中の  $y_1(x)$  の零点  $x = x_0$  (すなわち  $\omega = \sqrt{x_0}$ ) は図 5 の通過域左端の髭のような減衰零点になり、通過帯域内になりそうであるが、実際には損失の影響で減衰零点でなくなる。これらのことをまとめると

補題 2：次のことがいえる。

- (1)  $\omega = \sqrt{\alpha}$  は 2 位の減衰極
- (2)  $\omega = \sqrt{\beta}$  は 1 位の減衰極
- (3)  $\omega = \sqrt{\gamma}$  は 1 位の減衰零点

$y(x)$  の零点及び極がすべて  $x$  の実軸上の正の領域にあることから、次のことがほぼ成り立つ。

補題 3： $y(x)$  の近接した極と零点にはさまれた  $x$  の領域では、 $y(x)$  は単調関数。

このことは、 $y(x) = \Pi_i(x - b_i) / \Pi_i(x - c_i)$  を微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{[\Pi_i(x - c_i)]^2} \left\{ \sum_i \frac{1}{x - b_i} - \sum_i \frac{1}{x - c_i} \right\} \quad (54)$$

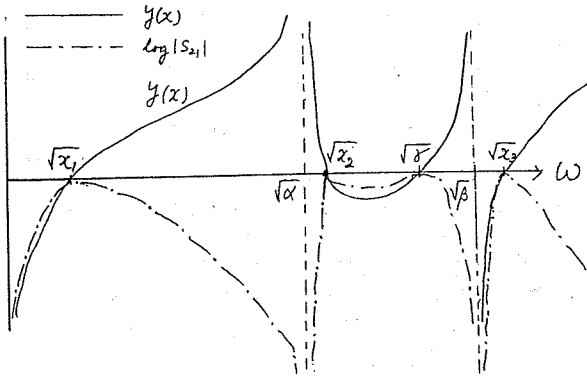


図 9  $y$ (実線) と周波数特性 (一点鎖線) の概略図

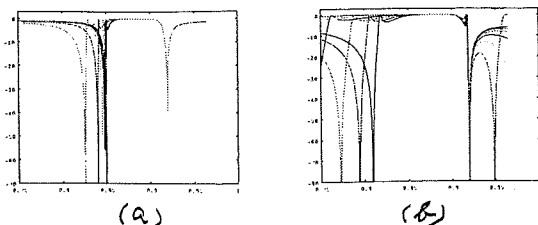


図 10 SAW3, SAW5 で  $L_{Y1}$  を変化させたときの特性変化

これから、例えば  $b_i$  と  $c_i$  が近いとすると、 $b_i$  と  $c_i$  の間では、上式より、 $\frac{dy}{dx}$  が定符号となることから分かる。

### 3.1.1 $L_{Y1}$ がある場合

この場合は、式 (40)-(42) において  $z$  を  $\bar{z}$  で置き換えるだけで良く、式 (37)、(38) を比較すると、上のことは単に

$$k_p \rightarrow L_{Y1} \quad (55)$$

$$(\alpha - \omega^2) \rightarrow (\bar{\alpha} - \omega^2)(\bar{\delta} - \omega^2) \quad (56)$$

と置き換えればよい。したがって式 (42) に対応して

$$\bar{y} = \frac{(\gamma - \omega^2)N(\omega^2)}{2k_p^2\omega(\bar{\alpha} - \omega^2)^2(\bar{\delta} - \omega^2)^2(\beta - \omega^2)} \quad (57)$$

$$N(\omega^2) = -k_s L_{Y1}^2 (\bar{\alpha} - \omega^2)^2 (\bar{\delta} - \omega^2)^2 + k_s \omega^2 (\gamma - \omega^2)^2 \\ + 2L_{Y1} \omega^2 (\bar{\alpha} - \omega^2)(\bar{\delta} - \omega^2)(\beta - \omega^2) \quad (58)$$

を得る。これから、式 (48)-(51) に対応して

$$\bar{y}_1(0) = -k_s L_{Y1}^2 \alpha < 0 \quad (59)$$

$$\bar{y}_1(\bar{\alpha}) = k_s \bar{\alpha} (\gamma - \bar{\alpha})^2 > 0 \quad (60)$$

$$\bar{y}_1(\bar{\delta}) = k_s \bar{\delta} (\gamma - \bar{\delta})^2 > 0 \quad (61)$$

$$\bar{y}_1(\beta) = -k_s L_{Y1}^2 (\bar{\alpha} - \beta)^2 (\bar{\delta} - \beta)^2 + k_s (\gamma - \beta)^2 \\ = -k_s \{ L_{Y1}^2 (\bar{\alpha} - \beta)^2 (\bar{\delta} - \beta)^2 + \beta (\gamma - \beta)^2 \} \quad (62)$$

$$\bar{y}_1(\gamma) = -k_s L_{Y1}^2 (\bar{\alpha} - \gamma)^2 (\bar{\delta} - \gamma)^2 \\ + 2L_{Y1} \gamma (\bar{\alpha} - \gamma)(\bar{\delta} - \gamma)(\beta - \gamma) < 0 \quad (63)$$

$$\bar{y}_1(+\infty) \approx -(k_s + 2L_{Y1})x^3 \rightarrow -\infty \quad (64)$$

$$\bar{\alpha} < \gamma, \quad \bar{\delta}, \beta > \gamma \quad (65)$$

と仮定しているの、

$$\bar{y}_1(\gamma) < 0 \quad (66)$$

これらをもとに  $\bar{y}_1(x)$  のグラフを描くと、図 8 に対応する図が得られる (図は省略)。これからさらに図 9 に対応する図が得られる。これから、

補題 4：次のことがいえる。

- (1)  $\omega = \sqrt{\bar{\alpha}}, \omega = \sqrt{\bar{\delta}}$  は 2 位の減衰極
- (2) 減衰極  $\omega = \sqrt{\beta}$  は 1 位の減衰極のままである。
- (3)  $\omega = \sqrt{\gamma}$  は減衰零点である。

(4)  $\bar{\alpha}$  は、 $L_{Y1} \approx 0$  のとき  $\bar{\alpha} \approx \alpha$  であり、 $L_{Y1}$  の増加と共に小さくなり、 $L_{Y1}$  を非常に大きくすると  $\omega = 0$  の近くまで移動する (式 (34) 参照)。したがって、低域側の減衰極  $\omega = \sqrt{\bar{\alpha}}$  はより低い方に移動する。これに伴い、通過帯域は低い周波数の方まで広がる。

(5)  $\bar{\delta}$  は、 $\bar{\delta} \approx \infty$  であり、 $L_{Y1}$  の増加と共に  $+\infty$  から次第に小さくなり、 $L_{Y1}$  を大きくしていくと  $\omega = \sqrt{\gamma}$  の近くまで移動する (式 (35) 参照)。

補題 4 の (4) によると、比較的小さな  $L_{Y1}$  を挿入することにより、低域側の減衰特性の改善 (最少減衰量の増大) が期待でき、また補題 4 の (5) によると、大きな  $L_{Y1}$  の挿入により、高域側の減衰特性の改善が期待できる。

### 3.1.2 $L_{Y3}$ の影響

この場合は、 $x_{sh}$  は変わらず、 $x_{fr}$  が  $x_{fr} + 2L_{Y3}\omega$  に変わる

だけである。 $L_{Y1}$ を入れた場合の検討は式(55), (56)の置き換えをすれば済むことであるから、以下では、 $L_{Y1} = 0$ の場合について述べる。

補題5: 次のことがいえる。

(1) 2位の減衰極  $\omega = \sqrt{\alpha}$  は  $L_{Y3}$  が 0 でなくなると  $\omega = \sqrt{\alpha}$  の前後の減衰極に分かれ、 $L_{Y3}$  の増加と共に  $\omega = \sqrt{\alpha}$  から遠ざかる。この二つの減衰極間の  $|s_{21}|$  の極大値はほぼ  $\omega = \sqrt{\alpha}$  で起こる。

(2) 減衰極  $\omega = \sqrt{\beta}$  は  $L_{Y3}$  の増加と共に  $\omega = \sqrt{\beta}$  から遠ざかる。

(3) 上の二つから、通過帯域が全体に少し右側(高周波側)にずれることになるが、このずれは小さい。

補題5により、 $L_{Y3}$  は、低域側の減衰特性の改善に役立つ。

### 3.2 SAW5 の場合

この場合は、 $x_{sh}$  および  $x_{fr}$  の両方に  $cx_s(\omega)$  が加わるだけである。すなわち、

$$x_{sh} \rightarrow x_{sh} + cx_s(\omega) \quad (67)$$

$$x_{fr} \rightarrow x_{fr} + cx_s(\omega) \quad (68)$$

$x_{sh}$ ,  $x_{fr}$  が共通の極  $\omega = \sqrt{\beta}$  をもつようになることに注意し、 $L_{Y1} = L_{Y3} = 0$  の場合について述べると、次のようになる。

補題6:

(1)  $\omega = \sqrt{\beta}$  は 2 位の減衰極になる。このことは、 $L_{Y3}$  の挿入によりこの極が二つに分かれ、二つの極の間の  $|s_{21}|$  の極大値はほぼ  $\omega = \sqrt{\beta}$  で与えられる。

(2)  $\omega = \sqrt{\alpha}$  は 2 位の減衰極、 $\omega = \sqrt{\gamma}$  は減衰零点。

(3)  $L_{Y1}$   $L_{Y3}$  が 0 でない場合についても SAW3 の場合と同様な結果を得る。

### 3.3 キャパシタンスを含む場合

本稿では  $\pi$  形または Y 形のインダクタンスの挿入について検討したが、一部キャパシタンスに置き換えた場合も同様に検討できる。

## 4. 数値シミュレーション

周波数帯域 0.75MHz~1.1MHz の間に 500 点の標本点を取り、周波数特性(減衰特性)の計算を行った。素子値としては次のように設定した(50[Ω]で規格化した値)。

$$L_{s1} = 1.4608[\text{nH}] \quad C_{s1} = 21.976[\text{pF}] \quad C_s = 328.31[\text{pF}]$$

$$L_{p1} = 9.9500[\text{nH}] \quad C_{p1} = 3.5073[\text{pF}] \quad C_p = 35.691[\text{pF}]$$

SAW3 フィルタにおいて素子は無損失とし、 $L_{Y1} = L_{Y3} = 0$

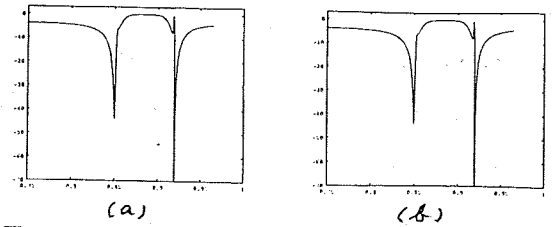


図 12 SAW3, SAW5 で  $Q = 800$  としたときの周波数特性

としたときの特性は先に挙げた図5である。さらに、 $L_{Y1}$  を 0.001~0.03 まで変化させたときのグラフと、 $L_{Y3}$  を 0.001~0.03 まで変化させたときのグラフを図10, 11に示す。

## 5. 損失の影響

本稿では  $Q = 800$  としてシミュレーションを行った結果を図12に示す。

## 6. 結 論

図3, 4のような SAW フィルタにおいて、インダクタンス挿入による効果を調べ、減衰特性の改善の可能性について解析的に検討し、シミュレーションにより結果を確認した(図10, 11)。

## 謝 辞

本研究は、学術振興会科学研究費・基盤研究(C) 課題番号: 16560339 のもとに行われた。また本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金特別推進研究(JST)の援助を受けた。

## 文 献

- [1] 佐藤良夫, 伊形理, “携帯電話用 RF 帯 SAW フィルタ” 電気情報通信学会誌 Vol.84, No.11 pp.782-789, 2001
- [2] 野口和繁, 寺田智, 坂本信義, 駒崎友和, “国内用 CDMA 携帯端末の小型化に貢献する SAW フィルタアンテナ分波器” 沖テクニカルレビュー 第190号 Vol.69, No.2, pp.54-57, 2002
- [3] 古川達也, 駒崎友和, 西哲生, “通過域最大平坦 SAW フィルタの一設計法” 電気情報通信学会技術研究報告, Vol.103, No.569, pp.17-22, January 2004
- [4] 小西 良弘監著, “通信用フィルタ回路の設計とその応用” 総合電子出版社 1994
- [5] 柴山乾夫, “弾性表面波工学” 電子情報通信学会 1983
- [6] 橋本研也, “ラダー型 SAW フィルタを科学する” 第30回 EM シンポジウム, pp.105-114, 2001
- [7] 児島 俊弘, “弾性表面波工学入門—IDT の簡単な等価回路—” 月刊ニューセラミックス, vol.7, no.7, 1993-
- [8] 斎藤伸自, 西哲生, “回路網合成演習” 朝倉書店 1985
- [9] 森口繁一, 宇田川 久, 一松信, “数学公式” 岩波全書 1981
- [10] V. Belevitch, “Classical network theory”, 1978.

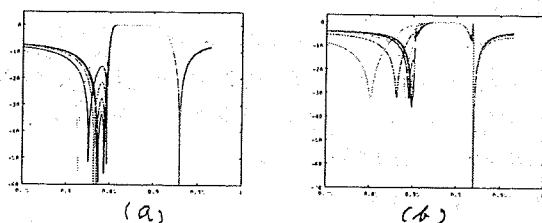


図 11 SAW3(左), SAW5(右) で  $L_{Y3}$  を変化させたときの特性変化

# SAW素子とインダクタからなる 対称形SAWフィルタの集中定数 回路モデルを用いる一設計法

西 哲生          駒崎 友和  
早稲田大学理工学術院   駒崎回路研究所

回路とシステム研究会

2007年1月29日

於 愛媛大学

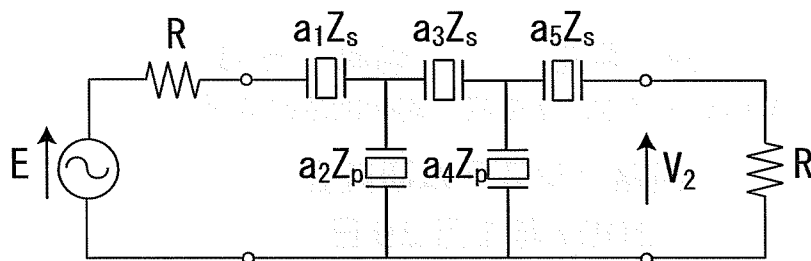
## [研究目的]

集中定数回路モデルで表されたSAW素子とインダクタからなる対称形SAWフィルタの設計について、特に、インダクタンスを挿入することによる効果、減衰極の変化などについて考察し、減衰域特性の改善が可能であることを示す。

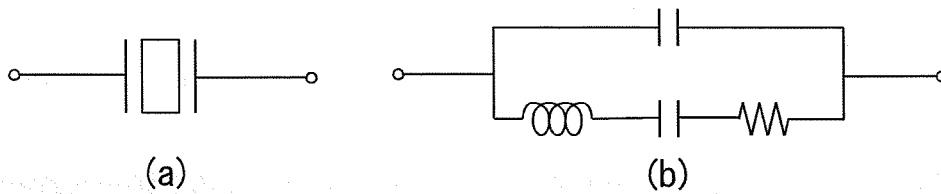
まえがき

携帯端末用アンテナ分波器 (duplexer) : 通常 SAW フィルタで実現

SAW フィルタの典型的構成 : SAW 素子のはしご形回路として実現



2



SAW 素子の記号 (a) とその集中定数等価回路 (b)

抵抗 : SAW 素子の損失

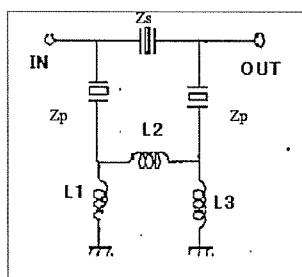
3

1. SAW素子は超音波の機械的振動を利用 ⇒ 分布定数的
2. 集中定数モデルでの設計の適否については別途検討必要
3. 集中定数モデルでの設計法も必要
4. 等価回路は簡単とはいえ関数論的設計には複雑すぎ
5. 実現可能な特性やその設計法などは解明されていない

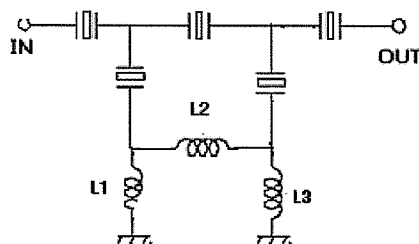
4

減衰域での特性改善のためSAWはしご形回路に集中定数素子のインダクタンスを挿入

SAW3フィルタ



SAW5フィルタ



5



だけである。 $L_{Y1}$ を入れた場合の検討は式(55), (56)の置き換えをすれば済むことであるから、以下では、 $L_{Y1} = 0$ の場合について述べる。

補題5: 次のことがいえる。

(1) 2位の減衰極  $\omega = \sqrt{\alpha}$  は  $L_{Y3}$  が0でなくなると  $\omega = \sqrt{\alpha}$  の前後の減衰極に分かれ、 $L_{Y3}$  の増加と共に  $\omega = \sqrt{\alpha}$  から遠ざかる。この二つの減衰極間の  $|s_{21}|$  の極大値はほぼ  $\omega = \sqrt{\alpha}$  で起こる。

(2) 減衰極  $\omega = \sqrt{\beta}$  は  $L_{Y3}$  の増加と共に  $\omega = \sqrt{\beta}$  から遠ざかる。

(3) 上の二つから、通過帯域が全体に少し右側(高周波側)にずれることになるが、このずれは小さい。

補題5により、 $L_{Y3}$  は、低域側の減衰特性の改善に役立つ。

### 3.2 SAW5の場合

この場合は、 $x_{sh}$  および  $x_{fr}$  の両方に  $cx_s(\omega)$  が加わるだけである。すなわち、

$$x_{sh} \rightarrow x_{sh} + cx_s(\omega) \quad (67)$$

$$x_{fr} \rightarrow x_{fr} + cx_s(\omega) \quad (68)$$

$x_{sh}$ ,  $x_{fr}$  が共通の極  $\omega = \sqrt{\beta}$  をもつようになることに注意し、 $L_{Y1} = L_{Y3} = 0$  の場合について述べると、次のようになる。

補題6:

(1)  $\omega = \sqrt{\beta}$  は2位の減衰極になる。このことは、 $L_{Y3}$  の挿入によりこの極が二つに分かれ、二つの極の間の  $|s_{21}|$  の極大値はほぼ  $\omega = \sqrt{\beta}$  で与えられる。

(2)  $\omega = \sqrt{\alpha}$  は2位の減衰極、 $\omega = \sqrt{\gamma}$  は減衰零点。

(3)  $L_{Y1}$   $L_{Y3}$  が0でない場合についても SAW3 の場合と同様な結果を得る。

### 3.3 キャパシタンスを含む場合

本稿では  $\pi$  形または  $Y$  形のインダクタンスの挿入について検討したが、一部キャパシタンスに置き換えた場合も同様に検討できる。

## 4. 数値シミュレーション

周波数帯域 0.75MHz~1.1MHz の間に 500 点の標本点を取り、周波数特性(減衰特性)の計算を行った。素子値としては次のように設定した(50[Ω]で規格化した値)。

$$L_{s1} = 1.4608[\text{nH}] \quad C_{s1} = 21.976[\text{pF}] \quad C_s = 328.31[\text{pF}]$$

$$L_{p1} = 9.9500[\text{nH}] \quad C_{p1} = 3.5073[\text{pF}] \quad C_p = 35.691[\text{pF}]$$

SAW3 フィルタにおいて素子は無損失とし、 $L_{Y1} = L_{Y3} = 0$

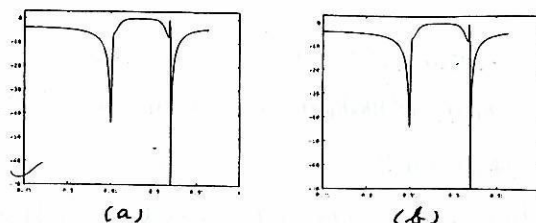


図12 SAW3, SAW5 で  $Q = 800$  としたときの周波数特性

としたときの特性は先に挙げた図5である。さらに、 $L_{Y1}$  を 0.001~0.03 まで変化させたときのグラフと、 $L_{Y3}$  を 0.001~0.03 まで変化させたときのグラフを図10, 11に示す。

## 5. 損失の影響

本稿では  $Q = 800$  としてシミュレーションを行った結果を図12に示す。

## 6. 結 論

図3, 4のような SAW フィルタにおいて、インダクタンス挿入による効果を調べ、減衰特性の改善の可能性について解析的に検討し、シミュレーションにより結果を確認した(図10, 11)。

## 謝 辞

本研究は、学術振興会科学研究費・基盤研究(C) 課題番号: 16560339 のもとに行われた。また本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金特別推進研究(JST)の援助を受けた。

## 文 献

- [1] 佐藤良夫, 伊形理, “携帯電話用 RF 帯 SAW フィルタ” 電気情報通信学会誌 Vol.84, No.11 pp.782-789, 2001
- [2] 野口和繁, 寺田智, 坂本信義, 駒崎友和, “国内用 CDMA 携帯端末の小型化に貢献する SAW フィルタアンテナ分波器” 沖テクニカルレビュー 第190号 Vol.69, No.2, pp.54-57, 2002
- [3] 古川達也, 駒崎友和, 西哲生, “通過域最大平坦 SAW フィルタの一設計法” 電気情報通信学会技術研究報告, Vol.103, No.569, pp.17-22, January 2004
- [4] 小西 良弘監著, “通信用フィルタ回路の設計とその応用” 総合電子出版社 1994
- [5] 柴山乾夫, “弾性表面波工学” 電子情報通信学会 1983
- [6] 橋本研也, “ラダー型 SAW フィルタを科学する” 第30回 EM シンポジウム, pp.105-114, 2001
- [7] 児島 俊弘, “弾性表面波工学入門—IDT の簡単な等価回路—” 月刊ニューセラミックス, vol.7, no.7, 1993-
- [8] 斎藤伸自, 西哲生, “回路網合成演習” 朝倉書店 1985
- [9] 森口繁一, 宇田川 久, 一松信, “数学公式” 岩波全書 1981
- [10] V. Belevitch, “Classical network theory”, 1978.

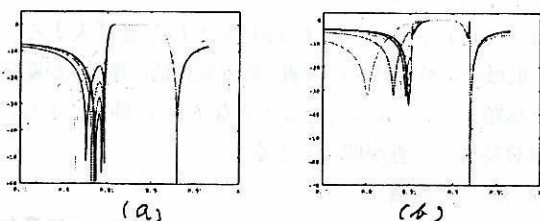


図11 SAW3(左), SAW5(右)で  $L_{Y3}$  を変化させたときの特性変化

だけである。 $L_{Y1}$ を入れた場合の検討は式(55), (56)の置き換えをすれば済むことであるから、以下では、 $L_{Y1} = 0$ の場合について述べる。

補題5: 次のことがいえる。

(1) 2位の減衰極  $\omega = \sqrt{\alpha}$  は  $L_{Y3}$  が0でなくなると  $\omega = \sqrt{\alpha}$  の前後の減衰極に分かれ、 $L_{Y3}$  の増加と共に  $\omega = \sqrt{\alpha}$  から遠ざかる。この二つの減衰極間の  $|s_{21}|$  の極大値はほぼ  $\omega = \sqrt{\alpha}$  で起こる。

(2) 減衰極  $\omega = \sqrt{\beta}$  は  $L_{Y3}$  の増加と共に  $\omega = \sqrt{\beta}$  から遠ざかる。

(3) 上の二つから、通過帯域が全体に少し右側(高周波側)にずれることになるが、このずれは小さい。

補題5により、 $L_{Y3}$  は、低域側の減衰特性の改善に役立つ。

### 3.2 SAW5の場合

この場合は、 $x_{sh}$  および  $x_{fr}$  の両方に  $cx_s(\omega)$  が加わるだけである。すなわち、

$$x_{sh} \rightarrow x_{sh} + cx_s(\omega) \quad (67)$$

$$x_{fr} \rightarrow x_{fr} + cx_s(\omega) \quad (68)$$

$x_{sh}$ ,  $x_{fr}$  が共通の極  $\omega = \sqrt{\beta}$  をもつようになることに注意し、 $L_{Y1} = L_{Y3} = 0$  の場合について述べると、次のようになる。

補題6:

(1)  $\omega = \sqrt{\beta}$  は2位の減衰極になる。このことは、 $L_{Y3}$  の挿入によりこの極が二つに分かれ、二つの極の間の  $|s_{21}|$  の極大値はほぼ  $\omega = \sqrt{\beta}$  で与えられる。

(2)  $\omega = \sqrt{\alpha}$  は2位の減衰極、 $\omega = \sqrt{\gamma}$  は減衰零点。

(3)  $L_{Y1}$   $L_{Y3}$  が0でない場合についても SAW3 の場合と同様な結果を得る。

### 3.3 キャパシタンスを含む場合

本稿では  $\pi$  形または Y 形のインダクタンスの挿入について検討したが、一部キャパシタンスに置き換えた場合も同様に検討できる。

## 4. 数値シミュレーション

周波数帯域 0.75MHz~1.1MHz の間に 500 点の標本点を取り、周波数特性(減衰特性)の計算を行った。素子値としては次のように設定した(50[ $\Omega$ ]で規格化した値)。

$$L_{s1} = 1.4608[\text{nH}] \quad C_{s1} = 21.976[\text{pF}] \quad C_s = 328.31[\text{pF}]$$

$$L_{p1} = 9.9500[\text{nH}] \quad C_{p1} = 3.5073[\text{pF}] \quad C_p = 35.691[\text{pF}]$$

SAW3 フィルタにおいて素子は無損失とし、 $L_{Y1} = L_{Y3} = 0$

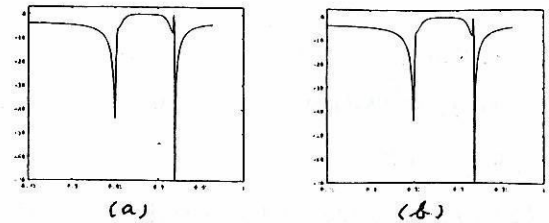


図12 SAW3, SAW5 で  $Q = 800$  としたときの周波数特性

としたときの特性は先に挙げた図5である。さらに、 $L_{Y1}$  を 0.001~0.03 まで変化させたときのグラフと、 $L_{Y3}$  を 0.001~0.03 まで変化させたときのグラフを図10, 11に示す。

## 5. 損失の影響

本稿では  $Q = 800$  としてシミュレーションを行った結果を図12に示す。

## 6. 結 論

図3, 4のような SAW フィルタにおいて、インダクタンス挿入による効果を調べ、減衰特性の改善の可能性について解析的に検討し、シミュレーションにより結果を確認した(図10, 11)。

## 謝 辞

本研究は、学術振興会科学研究費・基盤研究(C) 課題番号: 16560339 のもとに行われた。また本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金特別推進研究(JST)の援助を受けた。

## 文 献

- [1] 佐藤良夫, 伊形理, “携帯電話用 RF 帯 SAW フィルタ” 電気情報通信学会誌 Vol.84, No.11 pp.782-789, 2001
- [2] 野口和繁, 寺田智, 坂本信義, 駒崎友和, “国内用 CDMA 携帯端末の小型化に貢献する SAW フィルタアンテナ分波器” 沖テクニカルレビュー 第190号 Vol.69, No.2, pp.54-57, 2002
- [3] 古川達也, 駒崎友和, 西哲生, “通過域最大平坦 SAW フィルタの一設計法” 電気情報通信学会技術研究報告, Vol.103, No.569, pp.17-22, January 2004
- [4] 小西 良弘監著, “通信用フィルタ回路の設計とその応用” 総合電子出版社 1994
- [5] 柴山乾夫, “弾性表面波工学” 電子情報通信学会 1983
- [6] 橋本研也, “ラダー型 SAW フィルタを科学する” 第30回 EM シンポジウム, pp.105-114, 2001
- [7] 児島 俊弘, “弾性表面波工学入門—IDT の簡単な等価回路—” 月刊ニューセラミックス, vol.7, no.7, 1993-
- [8] 斎藤伸自, 西哲生, “回路網合成演習” 朝倉書店 1985
- [9] 森口繁一, 宇田川 久, 一松信, “数学公式” 岩波全書 1981
- [10] V. Belevitch, “Classical network theory”, 1978.

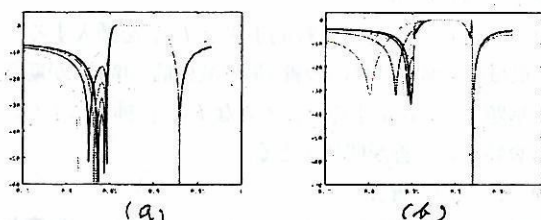


図11 SAW3(左), SAW5(右)で  $L_{Y3}$  を変化させたときの特性変化



# SAW素子とインダクタからなる 対称形SAWフィルタの集中定数 回路モデルを用いる一設計法

西 哲生          駒崎 友和  
早稲田大学理工学術院   駒崎回路研究所

回路とシステム研究会

2007年1月29日

於 愛媛大学

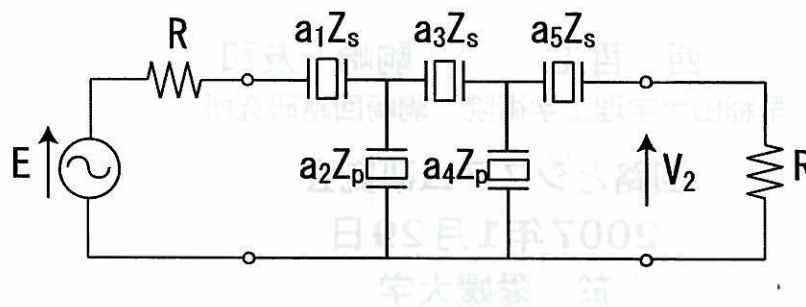
## [研究目的]

集中定数回路モデルで表されたSAW素子とインダクタからなる**対称形SAWフィルタ**の設計について、特に、インダクタンスを挿入することによる効果、減衰極の変化などについて考察し、**減衰域特性の改善**が可能であることを示す。

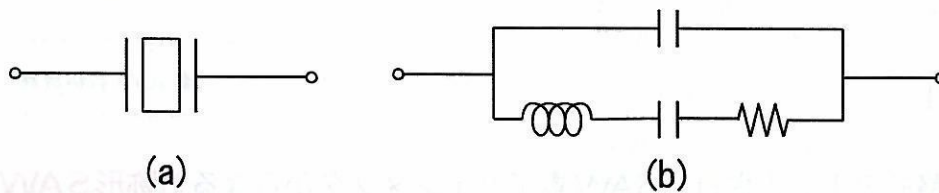
## まえがき

携帯端末用アンテナ分波器 (duplexer) : 通常 SAW フィルタで実現

SAW フィルタの典型的構成 : SAW 素子のはしご形回路として実現



2



SAW 素子の記号 (a) とその集中定数等価回路 (b)

抵抗 : SAW 素子の損失

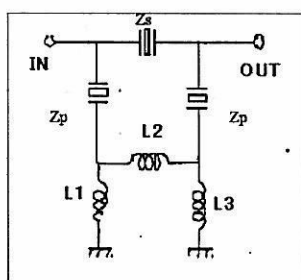
3

1. SAW素子は超音波の機械的振動を利用 ⇒ 分布定数的
2. 集中定数モデルでの設計の適否については別途検討必要
3. 集中定数モデルでの設計法も必要
4. 等価回路は簡単とはいえ関数論的設計には複雑すぎ
5. 実現可能な特性やその設計法などは解明されていない

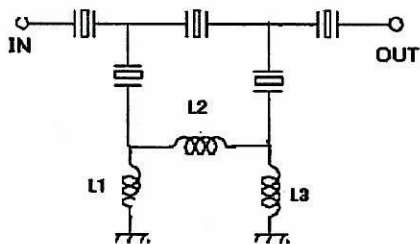
4

減衰域での特性改善のためSAWはしご形回路に集中定数素子のインダクタンスを挿入

SAW3フィルタ



SAW5フィルタ



5

等価回路を用いないと分布・集中混在形となり設計困難

⇒ 集中定数モデルの意義

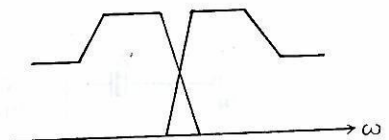
実際には10素子程度まで ⇒ パラメータが十数個程度の回路設計

⇒ 最適化手法を用いた設計も可能

6

## 設計仕様

送信側フィルタと受信側フィルタが一体かつ通過域帯が近接して配置

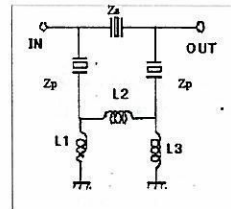


米国のCDMA方式 送信側の通過帯域は824～849MHz  
受信側の通過帯域が869～894MHz

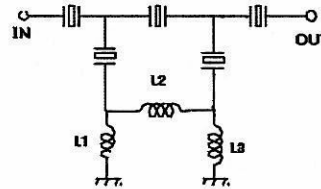
日本のCDMA方式 送信側通過帯域：887～925MHz  
受信側の通過帯域：832～870MHz

7

SAW3 フィルタ



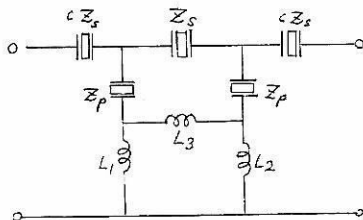
SAW5 フィルタ



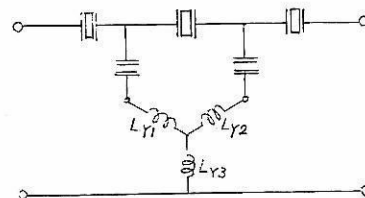
仮定 1: 回路は対称とする (  $\Rightarrow$  2等分定理が適用でき解析が容易)

8

□形インダクタ



Y形インダクタ



$L_{Y1}$ 、 $L_{Y3}$ の効果には明確な違いがある

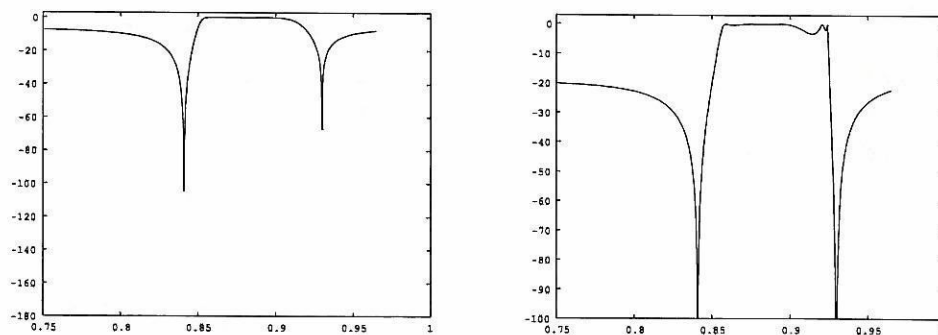
9

素子値 (50[Ω] で規格化した値)

Zsの素子値(1)	Ls1=4.34616	Cs1=7.47717	Cs=93.5025
Zpの素子値(1)	Lp1=2.81214	Cp1=12.4065	Cp=94.1286
Zsの素子値(2)	Ls1=1.4608	Cs1=21.976	Cs=328.31
Zpの素子値(2)	Lp1=9.9500	Cp1=3.5073	Cp=35.691
Zsの素子値(4)	Ls1=5.2888	Cs1=6.4947	Cs=97.029
Zpの素子値(4)	Lp1=0.92341	Cp1=41.809	Cp=425.45

10

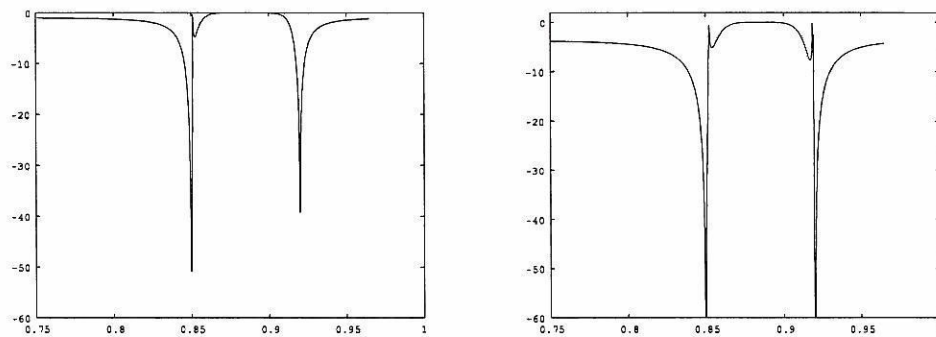
インダクタンス挿入前のSAW3, SAW5フィルタの特性(素子値(1))



11

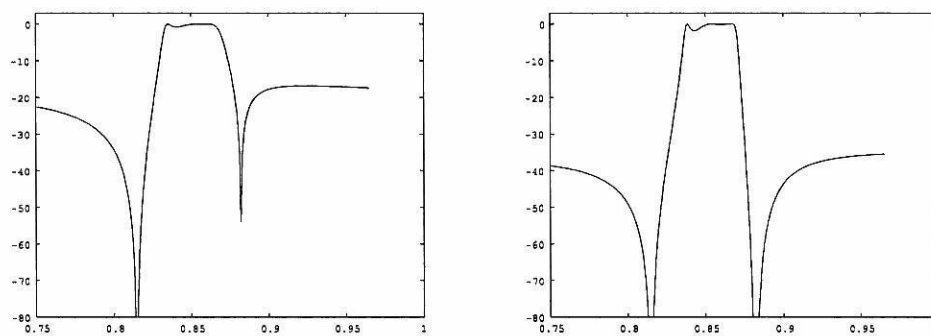


インダクタンス挿入前のSAW3, SAW5フィルタの特性(素子値(2))



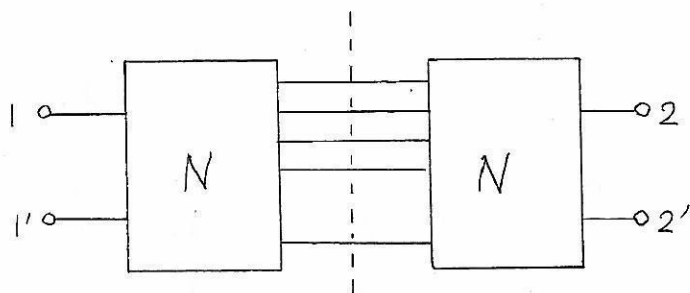
12

インダクタンス挿入前のSAW3, SAW5フィルタの特性(素子値(4))



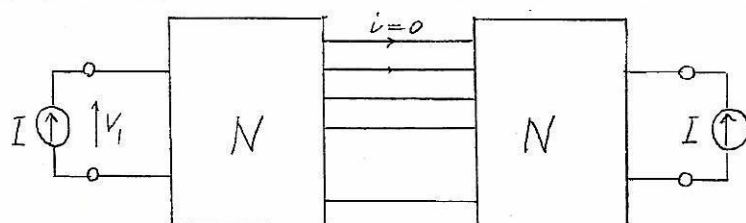
13

## Bartlettの2等分定理



$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{12}I_1 + z_{11}I_2 \end{aligned}$$

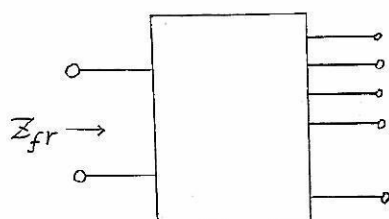
14



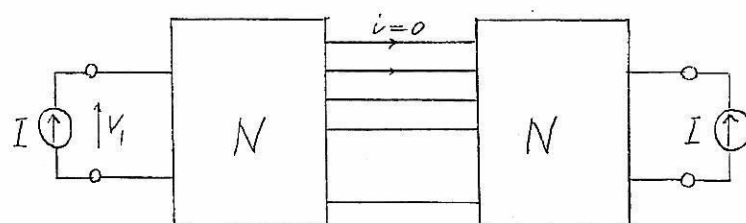
$$I_1 = I_2 = I$$

$$V_1 = z_{11}I + z_{12}I = (z_{11} + z_{12})I$$

15

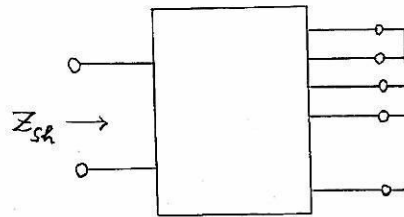


$$z_{fr} \equiv \frac{V_1}{I} = z_{11} + z_{12}$$



$$I_1 = -I_2 = I$$

$$V_1 = z_{11}I - z_{12}I = (z_{11} - z_{12})I$$



$$z_{sh} \equiv \frac{V_1}{I} = z_{11} - z_{12}$$

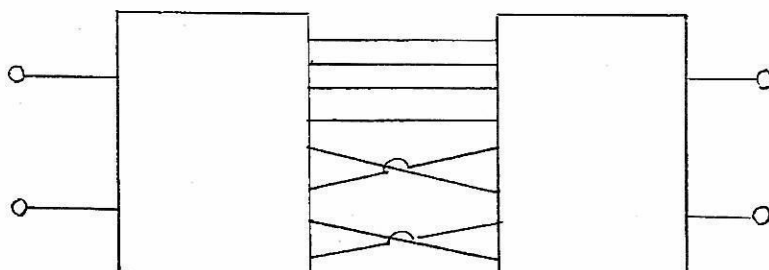
添字  $fr$ ,  $sh$  は "free", "short"

$$z_{fr} = z_{11} + z_{12}$$

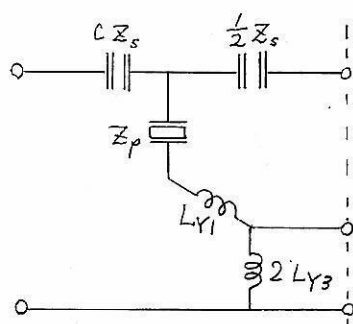
$$z_{sh} = z_{11} - z_{12}$$

$$z_{11} = \frac{1}{2}(z_{fr} + z_{sh})$$

$$z_{12} = \frac{1}{2}(z_{fr} - z_{sh})$$



18



$$\begin{aligned}
 z_{fr} = z_{11} + z_{12} &= z_p + L_{Y1}s + 2L_{Y3}s \\
 z_{sh} = z_{11} - z_{12} &= \frac{\frac{1}{2}z_s(z_p + L_{Y1}s)}{\frac{1}{2}z_s + (z_p + L_{Y1}s)} \\
 &= \frac{z_s(z_p + L_{Y1}s)}{z_s + 2(z_p + L_{Y1}s)}
 \end{aligned}$$

19

とおくと

$$\tilde{z}_p \equiv z_p + L_{Y1}s$$

$$z_{fr} = \tilde{z}_p + 2L_{Y3}s$$

$$z_{sh} = \frac{z_s \tilde{z}_p}{z_s + 2\tilde{z}_p}$$

$L_{Y1}$  と  $L_{Y3}$  の効果の違い

20

動作伝送関数

$$S = (Z - 1)(Z + 1)^{-1}$$

$$s_{21} = \frac{2z_{21}}{|Z| + z_{11} + z_{22} + 1}$$

$$\begin{aligned} s_{21} &= \frac{2z_{21}}{|Z| + z_{11} + z_{22} + 1} = \frac{2z_{21}}{z_{11}^2 - z_{12}^2 + 2z_{11} + 1} \\ &= \frac{z_{fr} - z_{sh}}{z_{sh}z_{fr} + z_{sh} + z_{fr} + 1} \\ &= \frac{z_{fr} - z_{sh}}{(1 + z_{sh})(1 + z_{fr})} \end{aligned}$$

21

## 周波数特性

SAW素子が損失を含まない場合について詳しく検討

$$\begin{aligned}z_s(j\omega) &= jx_s(\omega), & z_s(j\omega) &= jx_s(\omega) \\z_{sh}(j\omega) &= jx_{sh}(\omega), & z_{fr}(j\omega) &= jx_{fr}(\omega)\end{aligned}$$

22

$$|s_{21}(j\omega)|^2 = \frac{[x_{fr}(\omega) - x_{sh}(\omega)]^2}{[1 + x_{sh}^2(\omega)][1 + x_{fr}^2(\omega)]}$$

$$\frac{1}{|s_{21}(j\omega)|^2} = 1 + \left[ \frac{x_{sh}(\omega)x_{fr}(\omega) - 1}{x_{fr}(\omega) - x_{sh}(\omega)} \right]^2$$

$$y(\omega) \equiv \frac{x_{sh}(\omega)x_{fr}(\omega) - 1}{x_{fr}(\omega) - x_{sh}(\omega)}$$

$$\frac{1}{|s_{21}(j\omega)|^2} = 1 + y^2$$

$y$  : フィルタの特性関数

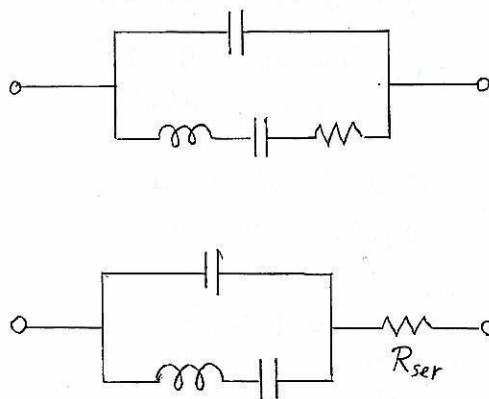
23

## 減衰極 ( $y = \infty$ となる角周波数)

1.  $x_{sh}(\omega)$ ,  $x_{fr}(\omega)$  の共通の極で、かつ留数が等しくないときは1位の減衰極
2.  $x_{sh}(\omega)$ ,  $x_{fr}(\omega)$  の共通の極で、かつ留数が等しいとき2位または  $[x_{fr}(\omega) - x_{sh}(\omega)]$  の零点の位数 + 2位の減衰極
3.  $x_{sh}(\omega)$ ,  $x_{fr}(\omega)$  の一方のみの極の場合は減衰極とならない
4.  $x_{sh}(\omega)$ ,  $x_{fr}(\omega)$  の極でないときは、 $[x_{fr}(\omega) - x_{sh}(\omega)]$  の零点の位数位の減衰極

24

## SAW素子のQ



25



$$I = \frac{E}{z + R_{ser}} = \frac{E}{\frac{1 - \omega^2 L_1 C_1}{j\omega C(1 - \omega^2 L_1 C_1) + j\omega C_1} + R_{ser}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \text{ において極大値 } |I|_{max} = E/R_{ser}$$

$$z(j\omega) = j\omega \tilde{L} + \frac{1}{j\omega \tilde{C}}$$

$$\frac{1}{\tilde{L}\tilde{C}} = \omega_0^2 \left( = \frac{1}{L_1 C_1} \right)$$

$$\begin{aligned} z(j\omega) &= \frac{1 - \omega^2 L_1 C_1}{j\omega C(1 - \omega^2 L_1 C_1) + j\omega C_1} \\ &= \frac{j\omega C_1}{j\omega C(1 - \omega^2 L_1 C_1) + j\omega C_1} \left[ j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right] \\ &= \frac{C_1}{C(1 - \omega^2 L_1 C_1) + C_1} \left[ j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right] \end{aligned}$$

26

$$\tilde{L} = \frac{L_1 C_1}{(C + C_1) - \omega^2 L_1 C_1 C}, \quad \tilde{C} = (C + C_1) - \omega^2 L_1 C_1 C$$

$$Q = \frac{\omega_0 \tilde{L}}{R_{ser}} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

$$R_{ser} = \frac{\omega_0 \tilde{L}}{Q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \cdot L_1 \cdot \frac{C_1}{C_1 + C - \omega^2 L_1 C_1 C}}{Q} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

27

## インダクタンス挿入の影響の検討

$$z_s(s) = k_s \frac{s^2 + \gamma}{s(s^2 + \beta)}, \quad 0 < \gamma < \beta$$

$$z_p(s) = k_p \frac{s^2 + \alpha}{s(s^2 + \gamma)}, \quad 0 < \alpha < \gamma$$

$$\tilde{z}_p(s) = z_p(s) + L_{Y1}s \equiv L_{Y1} \frac{(s^2 + \tilde{\alpha})(s^2 + \tilde{\delta})}{s(s^2 + \gamma)}, \quad \tilde{\alpha} < \gamma < \tilde{\delta}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{L_{Y1}\gamma + k_p - \sqrt{(L_{Y1}\gamma - k_p)^2 + 4(\gamma - \alpha)k_p L_{Y1}}}{2L_{Y1}}$$

$$\tilde{\delta} = \frac{L_{Y1}\gamma + k_p + \sqrt{(L_{Y1}\gamma - k_p)^2 + 4(\gamma - \alpha)k_p L_{Y1}}}{2L_{Y1}}$$

28

$$x_s(\omega) = -k_s \frac{\gamma - \omega^2}{\omega(\beta - \omega^2)}$$

$$x_p(\omega) = -k_p \frac{\alpha - \omega^2}{\omega(\gamma - \omega^2)}$$

$$\tilde{x}_p(\omega) = x_p(\omega) + L_{Y1}\omega = -L_{Y1} \frac{(\tilde{\alpha} - \omega^2)(\tilde{\delta} - \omega^2)}{\omega(\gamma - \omega^2)}$$

29

### SAW3の場合

$$L_{Y1} = 0, \quad L_{Y3} = 0$$

の場合を先ず検討

$$\begin{aligned} z_{sh} &= \frac{z_s z_p}{z_s + 2z_p}, \quad z_{fr} = z_p \\ y &= \frac{\frac{x_s x_p}{x_s + 2x_p} x_p - 1}{x_p - \frac{x_s x_p}{x_s + 2x_p}} = \frac{x_s x_p^2 - x_s - 2x_p}{x_s x_p + 2x_p^2 - x_s x_p} \\ &= \frac{x_s x_p^2 - x_s - 2x_p}{2x_p^2} \end{aligned}$$

30

$$\begin{aligned} y &= (\gamma - \omega^2) \\ &\times \frac{[-k_s k_p^2 (\alpha - \omega^2)^2 + k_s \omega^2 (\gamma - \omega^2)^2 + 2k_p \omega^2 (\alpha - \omega^2)(\beta - \omega^2)]}{2k_p^2 \omega (\alpha - \omega^2)^2 (\beta - \omega^2)} \end{aligned}$$

分子の[ ]の中を $y_1$ とおく。

$$\begin{aligned} y_1(\omega^2) &\equiv -k_s k_p^2 (\alpha - \omega^2)^2 + k_s \omega^2 (\gamma - \omega^2)^2 \\ &\quad + 2k_p \omega^2 (\alpha - \omega^2)(\beta - \omega^2) \end{aligned}$$

$$x \equiv \omega^2$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (k_s + 2k_p)x^3 - (k_s k_p^2 + 2k_s \gamma + 2k_p \alpha + 2k_p \beta)x^2 \\ &\quad + (2k_s k_p^2 \alpha + k_s \gamma^2 + 2k_p \alpha \beta)x - k_s k_p^2 \alpha^2 \end{aligned}$$

31

係数が $+-+-$ となっているので正根を3個もつ可能性がある。またこの式で $x$ を $-x$ で置き換えると、係数が $++++$ となるので負根をもたない

$y_1(x) = 0$ は正根を3個もつかまたは正根1個と複素根

$$y_1(0) = -k_s k_p^2 \alpha < 0$$

$$y_1(\alpha) = k_s \alpha (\gamma - \alpha)^2 > 0$$

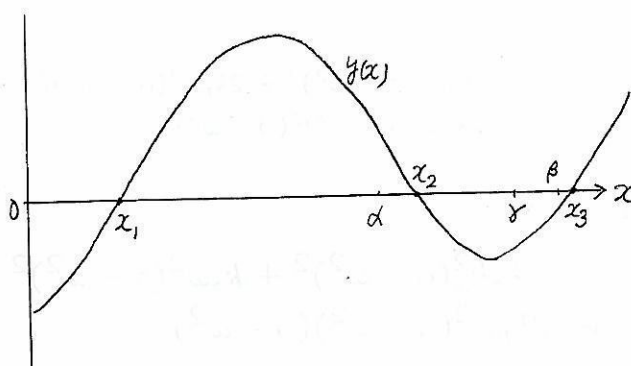
$$y_1(\gamma) = -k_s k_p^2 (\alpha - \gamma)^2 + 2k_p \gamma (\alpha - \gamma) (\beta - \gamma) < 0$$

$$\begin{aligned} y_1(\beta) &= -k_s k_p^2 (\alpha - \beta)^2 + k_s \beta (\gamma - \beta)^2 \\ &= -k_s \{k_p^2 (\alpha - \beta)^2 - \beta (\gamma - \beta)^2\} \end{aligned}$$

$$y_1(+\infty) \approx (k_s + 2k_p)x^3 \rightarrow +\infty$$

$y_1(\beta)$ は実際の数値例ではかなりはっきりと負の値

32



$y_1(x)$ の概略図  $\Rightarrow y_1(x) = 0$ は正根3個をもつ

$y_1(x)$ の零点:  $x_1, x_2, x_3$

33

$x_1, x_2, x_3$  の概略値の計算：

$k_p \gg k_s$  なので  $k_s$  の項を無視すると

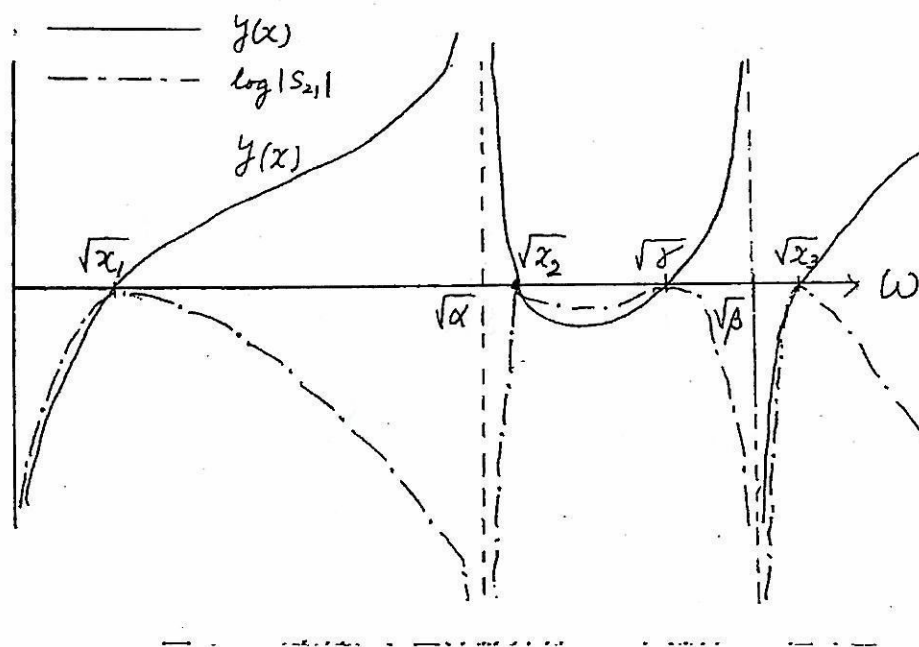
$$\begin{aligned} y_1(\omega^2) &\approx k_s k_p^2 (\alpha - \omega^2)^2 - 2k_p \omega^2 (\alpha - \omega^2) (\beta - \omega^2) \\ &= k_p (\alpha - \omega^2) [k_s k_p (\alpha - \omega^2) - 2\omega^2 (\beta - \omega^2)] \end{aligned}$$

この零点は、 $x = \alpha$  と

$$x = \frac{1}{4} \left\{ 2\beta + k_s k_p \pm \sqrt{(2\beta - k_s k_p)^2 + 8k_s k_p (\beta - \alpha)} \right\}$$

$x_2 \approx \alpha$ 。 $x_1$  は考察対象の周波数帯域よりもかなり低いところにあり、逆に  $x_3$  はかなり高いところにある。

34



35

補題2：

1.  $\omega = \sqrt{\alpha}$ は2位の減衰極
2.  $\omega = \sqrt{\beta}$ は1位の減衰極
3.  $\omega = \sqrt{\gamma}$ は1位の減衰零点
4.  $\omega = \sqrt{x_2}$ は通過域左端の髭のような減衰零点になり、通過帯域内になりそうであるが、実際には損失の影響で減衰零点でなくなる

36

$y(x)$ の零点及び極がすべて $x$ の実軸上の正の領域にあることから、次のことがほぼ成り立つ。

補題3： $y(x)$ の近接した極と零点にはさまれた $x$ の領域では $y(x)$ は単調関数

証明： $y(x) = \prod_i (x - b_i) / \prod_i (x - c_i)$ を微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{[\prod_i (x - c_i)]^2} \left\{ \sum_i \frac{1}{x - b_i} - \sum_i \frac{1}{x - c_i} \right\}$$

これから、例えば $b_i$ と $c_i$ が近いとすると、 $b_i$ と $c_i$ の間では、上式より、 $\frac{dy}{dx}$ が定符号となることから分かる。

37

$$\tilde{y} = \frac{(\gamma - \omega^2)\tilde{y}_1(\omega^2)}{2k_p^2\omega(\tilde{\alpha} - \omega^2)^2(\tilde{\delta} - \omega^2)^2(\beta - \omega^2)}$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1(\omega^2) &= -k_s L_{Y1}^2 (\tilde{\alpha} - \omega^2)^2 (\tilde{\delta} - \omega^2)^2 + k_s \omega^2 (\gamma - \omega^2)^2 \\ &+ 2L_{Y1} \omega^2 (\tilde{\alpha} - \omega^2) (\tilde{\delta} - \omega^2) (\beta - \omega^2)\end{aligned}$$

40

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1(0) &= -k_s L_{Y1}^2 \alpha < 0 \\ \tilde{y}_1(\tilde{\alpha}) &= k_s \tilde{\alpha} (\gamma - \tilde{\alpha})^2 > 0 \\ \tilde{y}_1(\tilde{\delta}) &= k_s \tilde{\delta} (\gamma - \tilde{\delta})^2 > 0 \\ \tilde{y}_1(\beta) &= -k_s L_{Y1}^2 (\tilde{\alpha} - \beta)^2 (\tilde{\delta} - \beta)^2 + k_s \beta (\gamma - \beta)^2 \\ &= -k_s \{L_{Y1}^2 (\tilde{\alpha} - \beta)^2 (\tilde{\delta} - \beta)^2 - \beta (\gamma - \beta)^2\} \\ \tilde{y}_1(\gamma) &= -k_s L_{Y1}^2 (\tilde{\alpha} - \gamma)^2 (\tilde{\delta} - \gamma)^2 \\ &+ 2L_{Y1} \gamma (\tilde{\alpha} - \gamma) (\tilde{\delta} - \gamma) (\beta - \gamma) < 0 \\ \tilde{y}_1(+\infty) &\approx -(k_s + 2L_{Y1})x^3 \rightarrow -\infty\end{aligned}$$

$$\tilde{\alpha} < \gamma, \quad \tilde{\delta}, \beta > \gamma$$

41

### $L_{Y1}$ がある場合

$$z_s(s) = k_s \frac{s^2 + \gamma}{s(s^2 + \beta)}, \quad 0 < \gamma < \beta$$

$$z_p(s) = k_p \frac{s^2 + \alpha}{s(s^2 + \gamma)}, \quad 0 < \alpha < \gamma$$

$$\tilde{z}_p(s) = z_p(s) + L_{Y1}s \equiv L_{Y1} \frac{(s^2 + \tilde{\alpha})(s^2 + \tilde{\delta})}{s(s^2 + \gamma)}, \quad \tilde{\alpha} < \gamma < \tilde{\delta}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{L_{Y1}\gamma + k_p - \sqrt{(L_{Y1}\gamma - k_p)^2 + 4(\gamma - \alpha)k_p L_{Y1}}}{2L_{Y1}}$$

$$\tilde{\delta} = \frac{L_{Y1}\gamma + k_p + \sqrt{(L_{Y1}\gamma - k_p)^2 + 4(\gamma - \alpha)k_p L_{Y1}}}{2L_{Y1}}$$

38

$z_p$ を $\tilde{z}_p$ で置き換えるだけで良い。

$$\begin{aligned} k_p &\rightarrow L_{Y1} \\ (\alpha - \omega^2) &\rightarrow (\tilde{\alpha} - \omega^2)(\tilde{\delta} - \omega^2) \end{aligned}$$

**補題1：** 通過域では $|x_s(\omega)| \ll |x_p(\omega)|$ であり、 $L_{Y1}$ の挿入による通過帯域への影響は小さい。

39



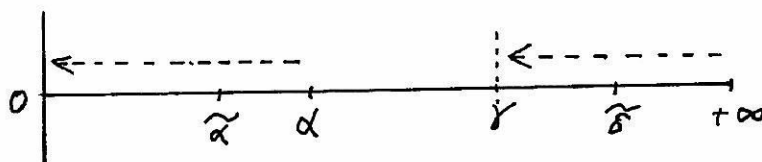
はより低い方に移動  $\Rightarrow$  通過帯域は低い周波数まで広がる。

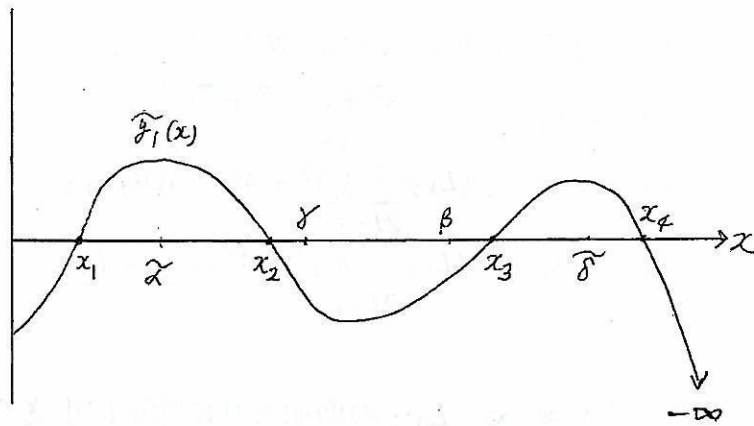
$$\tilde{z}_p(s) = z_p(s) + L_{Y1}s \equiv L_{Y1} \frac{(s^2 + \tilde{\alpha})(s^2 + \tilde{\delta})}{s(s^2 + \gamma)}, \quad \tilde{\alpha} < \gamma < \tilde{\delta}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{L_{Y1}\gamma + k_p - \sqrt{(L_{Y1}\gamma - k_p)^2 + 4(\gamma - \alpha)k_p L_{Y1}}}{2L_{Y1}}$$

$$\tilde{\delta} = \frac{L_{Y1}\gamma + k_p + \sqrt{(L_{Y1}\gamma - k_p)^2 + 4(\gamma - \alpha)k_p L_{Y1}}}{2L_{Y1}}$$

5.  $\tilde{\delta}$ は、 $L_{Y1} \approx 0$ のとき  $\tilde{\delta} \approx \infty$ 。 $L_{Y1}$ の増加と共に次第に小さくなり、 $L_{Y1}$ を大きくしていくと  $\omega = \sqrt{\gamma}$ の近くまで移動





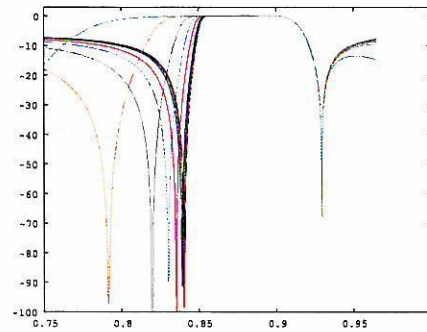
42

補題4：

1.  $\omega = \sqrt{\tilde{\alpha}}, \omega = \sqrt{\tilde{\delta}}$  は2位の減衰極
2. 減衰極  $\omega = \sqrt{\beta}$  は1位の減衰極のままである
3.  $\omega = \sqrt{\gamma}$  は減衰零点である
4.  $\tilde{\alpha}$  は、 $L_{Y1} \approx 0$  のとき  $\tilde{\alpha} \approx \alpha$ 。  $L_{Y1}$  の増加と共に小さくなり、  $L_{Y1}$  を非常に大きくすると  $\omega = 0$  の近くまで移動  $\Rightarrow$  低域側の減衰極  $\omega = \sqrt{\tilde{\alpha}}$

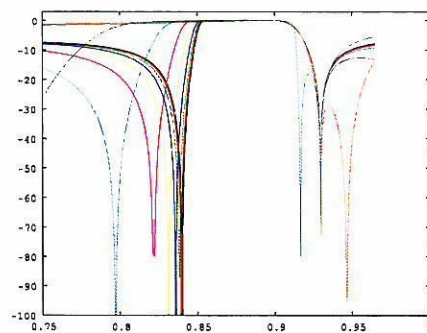
43

SAW3で $L_{Y1}$ を変化させたときの特性変化(素子値1):  $L_{Y1}$ を0.018から1.8倍ずつ10回反復



46

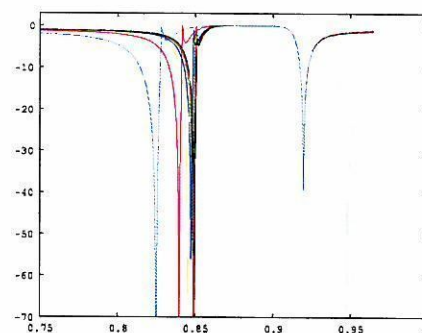
SAW3で $L_{Y1}$ を変化させたときの特性変化(素子値1( $L_{Y1}$ :大)):  $L_{Y1}$ を0.054から1.8倍ずつ10回反復

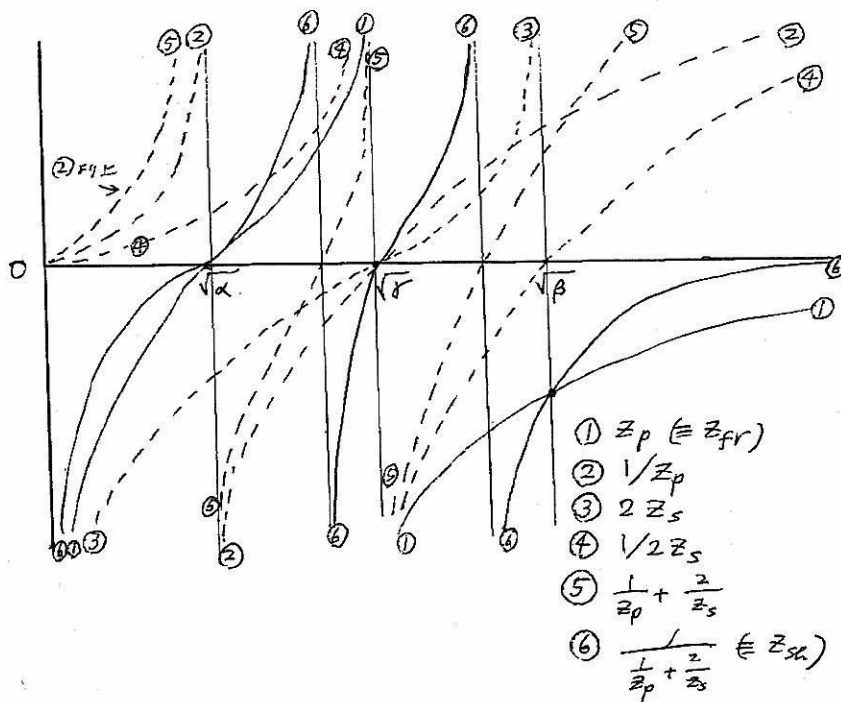


47

補題4の(4)によると、比較的小さな $L_{Y1}$ を挿入することにより、低域側の減衰特性の改善(最少減衰量の増大)が期待でき、また補題4の(5)によると、大きな $L_{Y1}$ の挿入により、高域側の減衰特性の改善が期待できる。

SAW3で $L_{Y1}$ を変化させたときの特性変化(素子値2)： $L_{Y1}$ を0.036から1.8倍ずつ10回反復





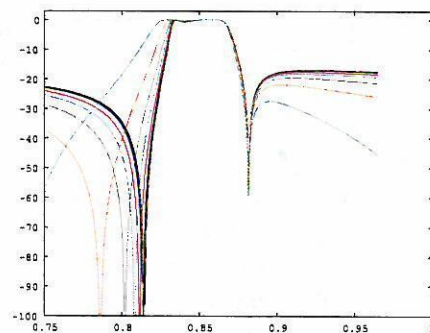
50

### 補題5:

1. 2位の減衰極  $\omega = \sqrt{\alpha}$  は  $L_{Y3}$  が0でなくなると  $\omega = \sqrt{\alpha}$  の前後の減衰極に分かれ、 $L_{Y3}$  の増加と共に  $\omega = \sqrt{\alpha}$  から遠ざかる。この二つの減衰極間の  $|s_{21}|$  の極大値はほぼ  $\omega = \sqrt{\alpha}$  で起こる。
2. 減衰極  $\omega = \sqrt{\beta}$  は  $L_{Y3}$  の増加と共に  $\omega = \sqrt{\beta}$  から遠ざかる。
3. 上の二つから、通過帯域が全体に少し右側（高周波側）にずれることになるが、このずれは小さい。

補題5により、 $L_{Y3}$  は、低域側の減衰特性の改善に役立つ

SAW3で $L_{Y1}$ を変化させたときの特性変化(素子値4)： $L_{Y1}$ を0.036から1.8倍ずつ10回反復



48

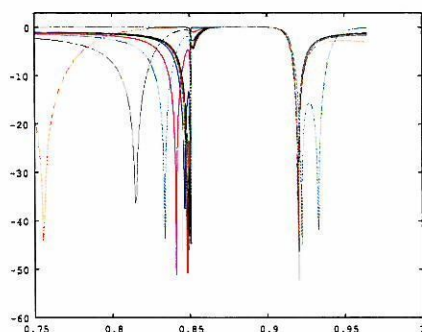
### $L_{Y3}$ の影響

- $x_{sh}$ は変わらない
- $x_{fr}$ が $x_{fr} + 2L_{Y3}\omega$ に変わる

$L_{Y1}$ を入れた場合の検討は $k_p \rightarrow L_{Y1}$ ,  $(\alpha - \omega^2) \rightarrow (\tilde{\alpha} - \omega^2)(\tilde{\delta} - \omega^2)$ の置き換えをすれば済むことであるから、以下では、 $L_{Y1} = 0$ の場合について述べる。

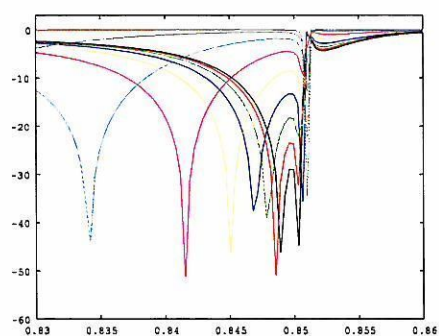
49

SAW3で $L_{Y3}$ を変化させたときの特性変化(素子値2)： $L_{Y3}$ を0.036から1.8倍ずつ10回反復



54

SAW3で $L_{Y3}$ を変化させたときの特性変化(素子値2)の一部拡大： $L_{Y3}$ を0.036から1.8倍ずつ10回反復



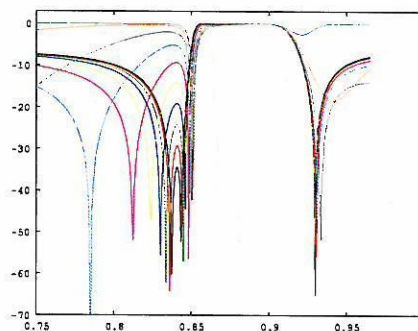
55

(1)は厳密には正しくないが、解析的にも近似的に成り立つことが示せ、かつ数値シミュレーションでも確かめられる。

これを利用すると $L_{Y3}$ の値が決定できる

52

SAW3で $L_{Y3}$ を変化させたときの特性変化(素子値1)： $L_{Y3}$ を0.018から1.8倍ずつ10回反復



53



$$z_{sh} = \frac{z_s z_p}{z_s + 2z_p}, \quad z_{fr} = z_p$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{x_{fr} x_{sh} - 1}{x_{fr} - x_{sh}} \\ &= \frac{\frac{x_s x_p}{x_s + 2x_p} x_p - 1}{x_p - \frac{x_s x_p}{x_s + 2x_p}} = \frac{x_s x_p^2 - x_s - 2x_p}{x_s x_p + 2x_p^2 - x_s x_p} \\ &= \frac{x_s x_p^2 - x_s - 2x_p}{2x_p^2} \end{aligned}$$

58

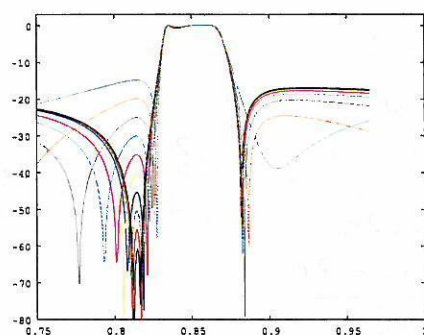
補題6( $L_{Y1} = L_{Y3} = 0$ の場合)：

1.  $\omega = \sqrt{\beta}$ は3位の減衰極になる。
2.  $\omega = \sqrt{\alpha}$ は2位の減衰極、 $\omega = \sqrt{\gamma}$ は減衰零点。

$L_{Y1}$ ,  $L_{Y3}$ が0でない場合についても SAW3の場合と同様

59

SAW3で $L_{Y3}$ を変化させたときの特性変化(素子値4)： $L_{Y3}$ を0.00018から1.8倍ずつ10回反復



56

## SAW5の場合

$x_{sh}$  および  $x_{fr}$  の両方に  $cx_s(\omega)$  が加わるだけ

$$x_{sh} \rightarrow x_{sh} + cx_s(\omega)$$

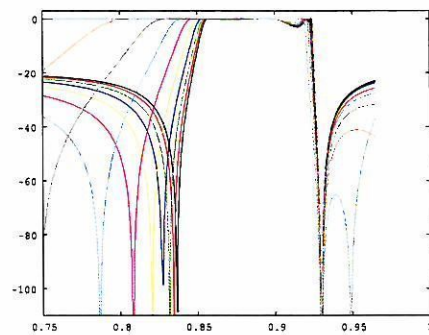
$$x_{fr} \rightarrow x_{fr} + cx_s(\omega)$$

$L_{Y1} = L_{Y3} = 0$  の場合について述べる

$x_{sh}$ ,  $x_{fr}$  が共通の極  $\omega = \sqrt{\beta}$  をもつようになる

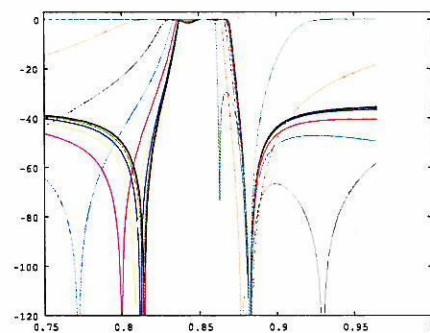
57

SAW5で $L_{Y1}$ を変化させたときの特性変化(素子値1( $L_{Y1}$ :大): $L_{Y1}$ を0.02から1.4倍ずつ10回反復



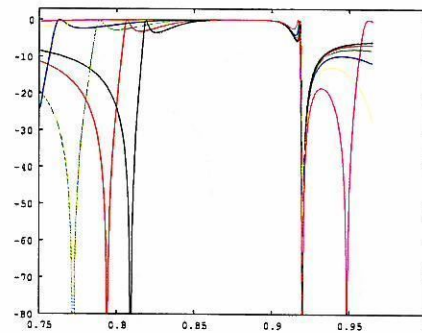
62

SAW5で $L_{Y1}$ を変化させたときの特性変化(素子値4): $L_{Y1}$ を0.0004から2.0倍ずつ10回反復



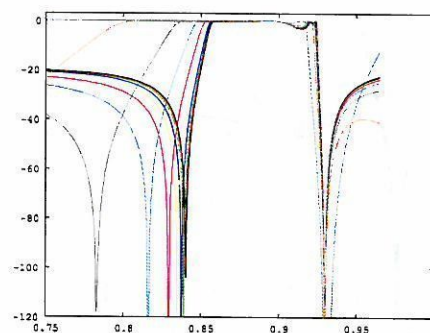
63

SAW5で $L_{Y1}$ を変化させたときの特性変化(素子値2)



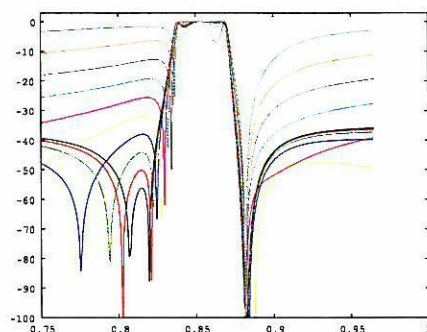
60

SAW5で $L_{Y1}$ を変化させたときの特性変化(素子値1):  $L_{Y1}$ を0.0018から1.8倍ずつ10回反復



61

SAW5で $L_{Y3}$ を変化させたときの特性変化(素子値4)： $L_{Y3}$ を0.002から1.8倍ずつ10回反復



66

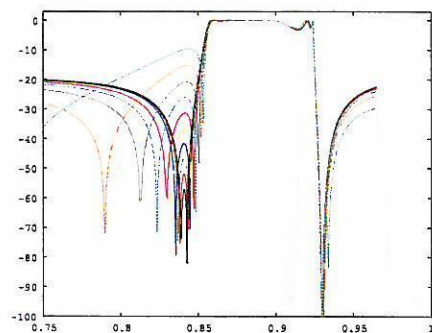
### キャパシタンスを含む場合

Y形のインダクタンス $L_{Y1}$  ( $= L_{Y2}$ )をキャパシタンスで置き換えると、SAW素子の特性が少し変わる。次数は変わらない。

$L_{Y1}$ をキャパシタンスで置き換えた場合も同様に検討可能

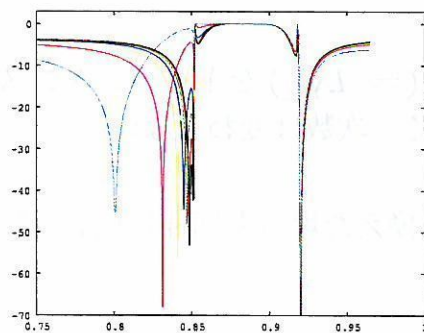
67

SAW5で $L_{Y3}$ を変化させたときの特性変化(素子値1) :  $L_{Y3}$ を0.00018から1.8倍ずつ10回反復



64

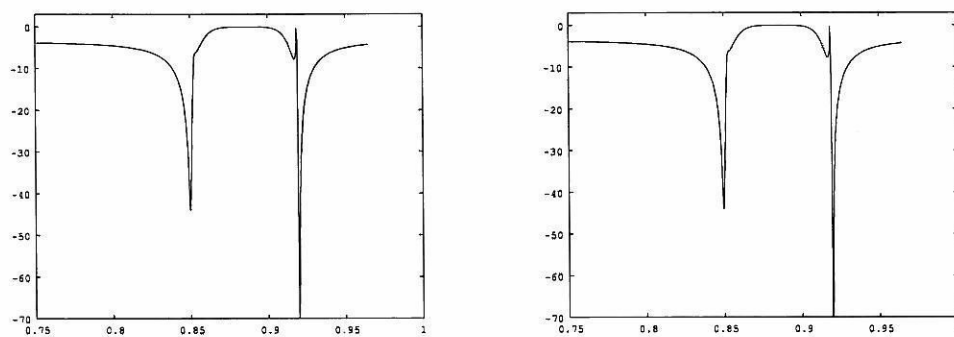
SAW5で $L_{Y3}$ を変化させたときの特性変化(素子値2) :  $L_{Y3}$ を0.036から1.8倍ずつ10回反復



65

## 損失の影響

SAW3, SAW5で $Q = 800$ としシミュレーション(素子値(1)(2)(4))



68

## 結論

インダクタンス挿入による効果を調べ、減衰極の移動及び減衰特性の改善の可能性について解析的に検討し、シミュレーションにより結果を確認した。

69



## スイッチ方式コンバータにおける平均電力のグラフ理論的解析

緒方 将人<sup>†</sup> 西 哲生<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 九州産業大学工学部電気工学科 〒813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1

<sup>††</sup> 早稲田大学理工学部 〒169-0072 新宿区大久保 2-4-12

E-mail: <sup>†</sup>mogata@te.kyusan-u.ac.jp, <sup>††</sup>nishi-t@waseda.jp

あらまし スイッチ方式 DC-DC コンバータは、スイッチがある周期でオン・オフ（もう一方のスイッチはオフ・オン）を繰り返しながら、直流電圧を任意の直流電圧値に変換して出力する回路である。十分な時間が経過した定常状態では、回路中の電圧および電流はスイッチ周期を基本周期とする周期関数となる。本稿では、電圧と電流の直流成分を陽に表す式を導出する。

キーワード スイッチ方式 DC-DC コンバータ, 平均電力, 直流成分, グラフ理論的解析

## Topological Analysis of Averaged Power in Switching DC-DC Converters

Masato OGATA<sup>†</sup> and Tetsuo NISHI<sup>††</sup>

<sup>†</sup> Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu Sangyo University,  
2-3-1 Matsukadai, Higashi-ku, Fukuoka, 812-8581 Japan

<sup>††</sup> Waseda University, 2-4-12 Ookubo, Sinjyuku-ku, Tokyo, 169-0072 Japan

E-mail: <sup>†</sup>mogata@te.kyusan-u.ac.jp, <sup>††</sup>nishi-t@waseda.jp

**Abstract** This paper presents explicit forms of averaged switch voltage, switch current, and DC voltage gain in two-switch DC-DC converters in simple topological terms.

**Key words** Switched-mode DC-DC Converter, Averaged Power, DC Component, Topological Analysis

### 1. はじめに

スイッチ方式コンバータは、パーソナルコンピュータや多くの電気機器に広く用いられているオンボード電圧源である [1]。スイッチのオンとオフを周期的に変化させることにより、コンバータは入力直流電圧を昇圧することができたり、降圧することができる。通常、コンバータはスイッチ（ダイオード）、インダクタ、キャパシタ、直流電圧源、負荷抵抗から構成されており、これらの回路素子をどのように接続するかによって昇圧できるのか、降圧できるのか、もしくは昇圧と降圧を両方できるのかという最も基本的な性質が決定されている [3], [4]。Wolaver は、枝の彩色定理 [9] を適用することにより、コンバータの基本的な性質をいくつか導出した。しかしながら、Wolaver の議論では昇圧もしくは降圧コンバータに限られているため、スイッチで消費される平均電力の直流成分の上限が昇降圧コンバータでは成立しない場合もある。本稿は、スイッチを二個含むコンバータ中の平均電圧と平均電流を陽に式で表し、スイッチで消費される電力について回路素子の接続に関する性質を明らかにする。

### 2. 準備

回路  $N$  は  $m$  個のインダクタ  $L_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $n$  個のキャパシタ  $C_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), 直流電圧源  $E$ , 出力抵抗  $R_o$ , および二つのスイッチ  $S_1$  と  $S_2$  から構成されているものとする。回路  $N$  の接続構造を表す有向グラフを  $G$  とし、電流の流れる方向に枝の方向を割り当てるものとする。ただし、電圧源  $E$  は電流の向きと逆に枝の方向を割り当てる。回路  $N$  中の素子のシンボル、例えば  $L_i$  は、グラフ  $G$  の枝をも表すものとする。

グラフ  $G$  に対する操作と部分グラフを次のように定義する。  
[定義 1]  $Q_1$  と  $Q_2$  をグラフ  $G$  の枝集合の（互いに素である）部分集合とする。 $G(Q_1 : Q_2)$  は、グラフ  $G$  の枝  $Q_1$  を短絡除去し、枝  $Q_2$  を開放除去して得られる部分グラフとする。

回路  $N$  に対して、次の仮定をする。

[仮定 1] 出力抵抗  $R_o$  とコンデンサ  $C_n$  は並列に接続されている。

[仮定 2] 回路  $N$  は二つのフェーズで動作している（図 1）。フェーズ 1 では、スイッチ  $S_1$  がオンであり、スイッチ  $S_2$  はオフある。フェーズ 2 では、スイッチ  $S_1$  と  $S_2$  の状態がそれぞれオフとオンとなる。



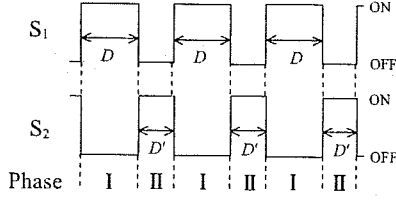


図1 回路Nのスイッチの動作状態

フェーズ1と2の持続時間をそれぞれ $D$ と $D'$ とすると、各フェーズの時比率はそれぞれ

$$d \equiv \frac{D}{D+D'}, \quad d' \equiv \frac{D'}{D+D'}. \quad (1)$$

となる。

[仮定3] 回路N中のインダクタ電流およびキャパシタ電圧はフェーズの切り換えにおいて連続的に変化する。

仮定3は回路NがCCM (continuous conduction mode) で動作していることを保証する。グラフGに関して次の仮定をする。

[仮定4] 電圧源 $E$ とキャパシタのみ、またはキャパシタのみから構成される閉路は存在しない。

[仮定5] スイッチ $S_1$ 、電圧源 $E$ およびキャパシタからなる閉路は存在しない。スイッチ $S_2$ 、電圧源 $E$ およびキャパシタからなる閉路も存在しない。

[仮定6] インダクタのみから構成されるカットセットは存在しない。

[仮定7] スイッチ $S_1$ とインダクタのみからなるカットセットは存在しない。スイッチ $S_2$ とインダクタのみからなるカットセットは存在しない。

仮定4~7より、次の性質が成り立つ。

[性質1] 枝 $S_1$ 、 $E$ および $C$  ( $\equiv \{C_1, \dots, C_n\}$ ) はグラフGの木 $T$ 、枝 $S_1$ 、 $E$ および $C$ はグラフGの別の木 $T'$ をなす。枝 $S_1$ 、 $R_o$ と $L$  ( $\equiv \{L_1, \dots, L_m\}$ )、及び枝 $S_2$ 、 $R_o$ と $L$ はグラフGの補木となる。

木 $T$ に関するグラフGの基本カットセット行列は

$$C_f = C \begin{bmatrix} S_1 & C & E & S_2 & L & R_o \\ S_1 & 1 & 0 & 0 & C_{12} & C_{1l} & C_{1r} \\ E & 0 & 1 & 0 & C_{e2} & C_{el} & C_{er} \\ S_2 & 0 & 0 & 1 & C_{e2} & C_{el} & C_{er} \end{bmatrix} \quad (2)$$

となる。ここで、 $1$ は単位行列、 $0$ は $0$ を要素にもつ行列またはベクトルを表す。スイッチ枝 $S_1$ と $S_2$ の向きは任意に割り当てることができるので、次の仮定は一般性を失わない。

[仮定8] 式(2)の部分行列 $C_{12}$ は

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

となる。

木 $T'$ に関するグラフGの基本カットセット行列

$$C_f' = C \begin{bmatrix} S_1 & C & E & S_2 & L & R_o \\ S_2 & C'_{21} & 0 & 0 & 1 & C'_{2l} & C'_{2r} \\ E & C'_{e1} & 1 & 0 & 0 & C'_{el} & C'_{er} \\ S_1 & C'_{e1} & 0 & 1 & 0 & C'_{el} & C'_{er} \end{bmatrix} \quad (3)$$

の各部分行列は、基本カットセット行列 $C_f$ の軸変換[10]から、

$$\begin{aligned} C'_{21} &= C_{12}^{-1} = 1 & C'_{e1} &= -C_{e2} & C'_{e1} &= -C_{e2} \\ C'_{2l} &= C_{1l} & C'_{el} &= C_{el} - C_{e2}C_{1l} & C'_{el} &= C_{el} - C_{e2}C_{1l} \\ C'_{2r} &= C_{1r} & C'_{er} &= C_{er} - C_{e2}C_{1r} & C'_{er} &= C_{er} - C_{e2}C_{1r} \end{aligned}$$

が成り立つ。また、仮定1から、

$$C_{er} = C'_{er} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$C_{1r} = C'_{2r} = C_{er} = C'_{er} = 0.$$

となる。

### 3. 回路解析

回路Nでは、十分時間が経過すると、その電圧および電流はスイッチング周期 $D+D'$ を基本周期とする周期関数となる。ここでは、基本周期 $D+D'$ の周期関数である電圧および電流の直流成分を陽で表す式を導出する。

回路N中のキャパシタ電圧とインダクタ電流の直流成分は線形方程式系

$$\begin{bmatrix} 0 & H^T \\ -H & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_L \\ \bar{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dC_{el}^T + d'C_{el}^T \\ 0 \end{bmatrix} E \quad (4)$$

を満足する。ここで、 $H = dC_{cl} + d'C'_{cl}$ 、 $M = \text{diag}[0, \dots, 0, -1/R_o]$ であり、 $\bar{v}_C$ と $\bar{i}_L$ はキャパシタの直流電圧とインダクタの直流電流からなるベクトルを表す。コンバータの定常解は任意の時比率に対して非零で一意的に定まることから、線形方程式系(4)について次の補題が得られる。

[補題1]  $m=n$ が成り立つとき、任意の時比率に対して線形方程式系(4)の非零解が一意的に決まる。[7]

式(4)をクラメル方法によって解くと、キャパシタの直流電圧は

$$\bar{v}_{C_i} = \frac{d|C_{cl}^{(i)}| + d'|C_{cl}^{(i)}|}{d|C_{cl}| + d'|C_{cl}'|} E \quad (5)$$

となる。ここで、 $C_{cl}^{(i)}$  ( $C_{cl}'^{(i)}$ )は行列 $C_{cl}$  ( $C_{cl}'$ )の第 $i$ 行ベクトルを行ベクトル $C_{cl}$  ( $C_{cl}'$ )に置き換えることによって得られる行列である。

また、インダクタの直流電流は

$$\bar{i}_{L_i} = -G_v \frac{d|C_{cl}^{<i>}| + d'|C_{cl}^{<i>}|}{d|C_{cl}| + d'|C_{cl}'|} \frac{E}{R_o} \quad (6)$$

となる。ここで、 $G_v = \bar{v}_{C_n}/E$ であり、 $C_{cl}^{<i>}$  ( $C_{cl}'^{<i>}$ )は行列 $C_{cl}$  ( $C_{cl}'$ )の第 $i$ 列ベクトルを列ベクトル $C_{er}$  ( $C_{er}'$ )に置き換えることによって得られる行列である。

式(5)から、次の補題が得られる。

[補題 2] 回路  $N$  の直流電圧変換比  $G_v$  は

$$G_v = \frac{\bar{v}_{C_n}}{E} = \frac{d|C_{cl}^{(n)}| + d'|C_{cl}'^{(n)}|}{d|C_{cl}| + d'|C_{cl}'|} E. \quad (7)$$

となる. [7]

また, 式 (5), (6) とキルヒホッフの法則から, 次の補題が得られる.

[補題 3] 定常状態におけるスイッチ  $S_1$  の電圧と電流の直流成分は

$$\bar{v}_1 = d' \frac{E}{d|C_{cl}| + d'|C_{cl}'|} \begin{vmatrix} C_{e2} & C_{el} \\ C_{e2} & C_{cl} \end{vmatrix} \quad (8)$$

および

$$\bar{i}_1 = -d \frac{E}{R_o} \frac{G_v}{d|C_{cl}| + d'|C_{cl}'|} \begin{vmatrix} 0 & C_{1l} \\ C_{cr} & C_{cl} \end{vmatrix} \quad (9)$$

となる.

付録で補題 3 を証明する.

[補題 4] スイッチ  $S_2$  の電圧と電流の直流成分をそれぞれ  $\bar{v}_2$  と  $\bar{i}_2$  とすると, スイッチ  $S_1$  との直流電圧, 電流との間に

$$d\bar{v}_1 + d'\bar{v}_2 = 0, \quad d'\bar{i}_1 = d\bar{i}_2.$$

が成り立つ.

[補題 4 の証明] キルヒホッフの電圧則から, スイッチ  $S_1$  と  $S_2$  の直流電圧は

$$\bar{v}_1 = d'(C_{e1}^T \bar{v}_C - C_{e1}^T E), \quad \bar{v}_2 = d(C_{e2}^T \bar{v}_C - C_{e2}^T E).$$

となる. 式 (3) から, 補題 4 の関係が成り立つ. ただし, 補題 4 は  $C_{12} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$  の下で成立する.

[定義 2] スイッチ  $S_1$  で消費される直流電力を

$$P_{dc1} = \bar{v}_1 \bar{i}_1.$$

と定義する.

## 4. 主 結 果

回路  $N$  が DC-DC コンバータとして動作するとき, 式 (7) の分母は任意の  $0 < d < 1$  に対して非零となる. したがって,  $|C_{cl}|$  と  $|C_{cl}'|$  の一方は必ず非零である. また, キャパシタやインダクタの枝の向きは任意に割り当てることができるので, 一般性を失うことなく, 次を仮定することができる.

[仮定 9]

$$|C_{cl}| = 1 \quad (10)$$

仮定 9 は, グラフ  $G$  で枝  $S_1$ ,  $E$  および  $L$  とで木をなしていることを意味している. 木  $\{S_1, E, L\}$  に関する基本カットセット行列の主要部は, 式 (2) の基本カットセット行列  $C_f$  を  $C_{cl}$  中の要素を枢軸として掃き出すことによって導出でき,

$$\begin{array}{c} S_2 \quad C \quad R_o \\ \begin{array}{c} S_1 \\ L \\ E \end{array} \begin{bmatrix} C_{12} - C_{1l}C_{cl}^{-1}C_{e2} & -C_{1l}C_{cl}^{-1} & -C_{1l}C_{cl}^{-1}C_{cr} \\ C_{cl}^{-1}C_{e2} & C_{cl}^{-1} & C_{cl}^{-1}C_{cr} \\ C_{e2} - C_{el}C_{cl}^{-1}C_{e2} & -C_{el}C_{cl}^{-1} & -C_{el}C_{cl}^{-1}C_{cr} \end{bmatrix} \end{array} \quad (11)$$

となる. 式 (11) の木  $\{S_1, E, L\}$  に関する基本カットセット行列の主要部の要素を用いて, 回路  $N$  の直流電圧変換比とスイッチで消費される直流電力を次のように表すことができる.

[定理 1]

$$\begin{array}{c} S_2 \quad R_o \\ S_1 \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \\ E \end{array} \quad (12)$$

を部分グラフ  $G(L : C)$  の木  $\{S_1, E\}$  に関する基本カットセット行列の主要部とする. このとき, 回路  $N$  の直流電圧変換率は

$$G_v = -\frac{\delta d + (\alpha\delta - \beta\gamma)d'}{d + \alpha d'}. \quad (13)$$

となる.

[定理 1 の証明] 式 (3) および, 行列  $C_{cl}^{(n)}$  と  $C_{cl}'^{(n)}$  の定義から, 回路  $N$  の直流電圧変換率  $G_v = \bar{v}_{C_n}/E$  は,

$$G_v = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & C_{1l} & 0 \\ d & C_{cl} & C_{cr} \\ 0 & C_{el} & 0 \end{vmatrix} + d' \begin{vmatrix} C_{12} & C_{1l} & 0 \\ C_{e2} & C_{cl} & C_{cr} \\ C_{e2} & C_{el} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & C_{1l} & 0 \\ d & C_{cl} & 0 \\ 0 & C_{el} & 1 \end{vmatrix} + d' \begin{vmatrix} C_{12} & C_{1l} & 0 \\ C_{e2} & C_{cl} & 0 \\ C_{e2} & C_{el} & 1 \end{vmatrix}}. \quad (14)$$

となる. 式 (14) の分母と分子に含まれる四つの係数行列の左から

$$\begin{bmatrix} 1 & -C_{1l}C_{cl}^{-1} & 0 \\ 0 & C_{cl}^{-1} & 0 \\ 0 & -C_{el}C_{cl}^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

を掛け, 式 (11) の各要素と比較すると, 式 (13) が得られる.

[定理 2] スイッチ  $S_1$  で消費される直流電力を  $P_{dc1}$  とする. このとき,

$$P_{dc1} \equiv \bar{v}_1 \bar{i}_1 = -dd' \frac{G_v}{R_o} \left( \frac{E}{d + \alpha d'} \right)^2 \beta \gamma. \quad (15)$$

となる.

[定理 2 の証明] 式 (8) と (9) 中の行列式はそれぞれ

$$\begin{vmatrix} C_{e2} & C_{el} \\ C_{e2} & C_{cl} \end{vmatrix} = |C_{cl}| \cdot |C_{e2} - C_{el}C_{cl}^{-1}C_{e2}| = \gamma$$

および

$$\begin{vmatrix} 0 & C_{1l} \\ C_{cr} & C_{cl} \end{vmatrix} = |C_{cl}| \cdot |0 - C_{1l}C_{cl}^{-1}C_{cr}| = \beta$$

となる. したがって, 直流電力  $P_{dc1}$  は式 (15) で表すことができる.

定理 1 から, 回路  $N$  が DC-DC コンバータとして動作するための必要十分条件は, 部分グラフ  $G(L : C)$  が図 2 にあける四つのグラフの内の一つになる. したがって, 図 2 のグラフについて定理 2 の直流電力を計算すると, スイッチでの直流成分に関する受動性について次の結果が得られる.

[定理 3] 任意の時比率に対して, 昇降圧コンバータのスイッチ  $S_1$  で消費される直流電力は負となる.

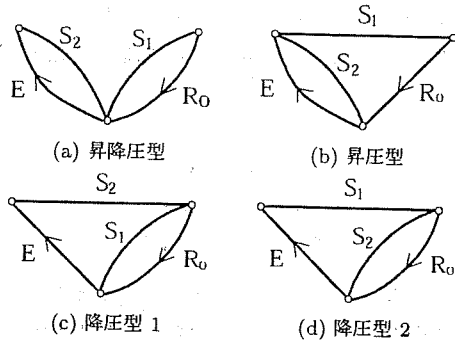


図2 コンバータの直流等価回路のグラフ  $G(L: C)$

[定理3の証明] 定理1から、回路  $N$  が昇降圧型コンバータとして動作するための必要十分条件は、

$$\alpha = 0 \quad \beta \neq 0 \quad \gamma \neq 0 \quad \delta = 0.$$

である。したがって、スイッチ  $S_1$  での直流電圧  $P_{dc1}$  は、

$$P_{dc1} = -\frac{1}{R_o} \left( \frac{d'}{d} E \right)^2 < 0. \quad (16)$$

となり、定理は証明される。

[定理4] 任意の時比率に対して、昇圧コンバータのスイッチ  $S_1$  で消費される直流電力は負となる。

[定理4の証明] 定理1から、回路  $N$  が降圧コンバータとして動作するための必要十分条件は、

$$\alpha = 0 \quad \beta\gamma = 1 \quad \delta = -1.$$

である。したがって、スイッチ  $S_1$  での直流電圧  $P_{dc1}$  は、

$$P_{dc1} = -\frac{d'}{R_o} \left( \frac{E}{d} \right)^2 < 0. \quad (17)$$

となり、定理は証明される。

[定理5] 降圧コンバータの直流等価回路において、出力抵抗  $R_o$  と閉路をなすスイッチは任意の時比率に対して消費直流電圧が負である。ここで、直流等価回路とはキャパシタを全て開放除去し、インダクタを全て短絡除去して得られる回路である。

[定理5の証明] グラフ  $G$  が図2(c) および (d) の一方を部分グラフに持つことが回路  $N$  が降圧コンバータとして動作するための必要十分条件である。図2(c) のグラフにおいてスイッチ  $S_1$  が消費する直流電力は

$$P_{dc1} = -\frac{d}{R_o} (d'E)^2 < 0, \quad (18)$$

である。一方、図2(d) では、

$$P_{dc1} = \frac{d'}{R_o} (dE)^2 > 0.$$

となり、補題4の

$$P_{dc1} + P_{dc2} = 0$$

から、スイッチ  $S_2$  で消費される直流電力は負である。したがって、降圧コンバータの直流等価回路において出力抵抗と閉路をなすスイッチで消費される直流電力は、任意の時比率に対して

負となる。

出力抵抗  $R_o$  で消費される直流電力を  $P_o$  とする。このとき、 $P_o$  は、

$$P_o = \frac{1}{R_o} \bar{v}_{C_n}^2 = \frac{1}{R_o} (G_v E)^2 \quad (19)$$

となる。式(16)と(19)から、次の定理が成り立つ。

[定理6] 昇降圧コンバータにおいて、直流電力が負であるスイッチの直流電力は、 $P_o$  に負号をとったものである。

## 5. む す び

本稿では、二つのスイッチを含むコンバータ回路の電圧・電流の直流成分を陽で表す式を導出し、各タイプのコンバータについてスイッチで消費される平均電力の直流成分の正負について検討した。スイッチの平均電力は常に0であるが、その直流成分は正となるスイッチと負となるスイッチがコンバータには必要となる。このことは、実際のコンバータにおいてはスイッチの一方が受動素子であるダイオードによって置き換えることができることと関係している。

## 付 録

### 補題3の証明

キルヒホッフの電圧則から、スイッチ  $S_1$  の直流電圧は、

$$\bar{v}_1 = d' \left( C_{e1}^T \bar{v}_C - C_{e1}^T E \right). \quad (A.1)$$

となる。式(3)、(5)と(6)を(A.1)に代入すると、

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= -d' \left( C_{e2}^T \bar{v}_C - C_{e2}^T E \right) = -d' \begin{bmatrix} C_{e2}^T & C_{e2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_C \\ -E \end{bmatrix} \\ &= -d' \frac{E}{d|C_{cl}| + d'|C'_{cl}|} \begin{bmatrix} C_{e2}^T & C_{e2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d|C_{cl}^{(1)}| + d'|C'_{cl}^{(1)}| \\ \vdots \\ d|C_{cl}^{(n)}| + d'|C'_{cl}^{(n)}| \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= -d' \frac{E}{d|C_{cl}| + d'|C'_{cl}|} \left\{ d \begin{bmatrix} C_{e2}^T & C_{e2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |C_{cl}^{(1)}| \\ \vdots \\ |C_{cl}^{(n)}| \\ -1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - d' \begin{bmatrix} C_{e1}^T & C_{e1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |C'_{cl}^{(1)}| \\ \vdots \\ |C'_{cl}^{(n)}| \\ -1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (A.2) \end{aligned}$$

が得られる。式(A.2)の括弧内の第一項は、列ベクトル  $C_{e2}$  に関して展開すると、

$$d \begin{bmatrix} C_{e2}^T & C_{e2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |C_{cl}^{(1)}| \\ \vdots \\ |C_{cl}^{(n)}| \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= d \begin{bmatrix} |C_{cl}^{(1)}| & \dots & |C_{cl}^{(n)}| & -|C_{cl}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{e2} \\ C_{e2} \end{bmatrix} \\
&= -d \left\{ \begin{bmatrix} 0 & C_{el} \\ C_{e2} & C_{cl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{e2} & 0 \\ C_{e2} & C_{cl} \end{bmatrix} \right\} = -d \begin{bmatrix} C_{e2} & C_{el} \\ C_{e2} & C_{cl} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

となる。同様に、式 (A.2) の括弧内の第二項も

$$d' \begin{bmatrix} C_{cl}^{T'} & C_{e1}^{T'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |C_{cl}^{(1)}| \\ \vdots \\ |C_{cl}^{(n)}| \\ -1 \end{bmatrix} = -d' \begin{bmatrix} C_{e1}' & C_{el}' \\ C_{cl}' & C_{cl}' \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

となる。したがって、式 (A.2) 全体は、

$$\bar{v}_1 = d' \frac{1}{d|C_{cl}| + d'|C_{cl}'|} \left\{ d \begin{bmatrix} C_{e2} & C_{el} \\ C_{e2} & C_{cl} \end{bmatrix} - d' \begin{bmatrix} C_{e1}' & C_{el}' \\ C_{cl}' & C_{cl}' \end{bmatrix} \right\} E. \tag{A.5}$$

となる。同じように、直流電流  $\bar{i}_1$  も

$$\bar{i}_1 = -d \frac{G_v}{d|C_{cl}| + d'|C_{cl}'|} \left\{ d \begin{bmatrix} 0 & C_{1l} \\ C_{cr} & C_{cl} \end{bmatrix} + d' \begin{bmatrix} 0 & C_{2l}' \\ C_{cr}' & C_{cl}' \end{bmatrix} \right\} \frac{E}{R_o}. \tag{A.6}$$

と表される。

式 (3) を用いると、式 (A.5) の直流電圧  $\bar{v}_1$  の括弧内の項は

$$\begin{aligned}
&d \begin{bmatrix} C_{e2} & C_{el} \\ C_{e2} & C_{cl} \end{bmatrix} + d' \begin{bmatrix} C_{e2} & C_{el} - C_{e2}C_{1l} \\ C_{e2} & C_{cl} - C_{e2}C_{1l} \end{bmatrix} \\
&= d \begin{bmatrix} C_{e2} & C_{el} \\ C_{e2} & C_{cl} \end{bmatrix} + d' \begin{bmatrix} C_{e2} & C_{el} \\ C_{e2} & C_{cl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -C_{1l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

となる。 $d + d' = 1$  に注意すると、式 (A.5) と (A.7) から補題 3 は証明される。

## 文 献

- [1] 原田 耕介, 二宮 保, 顧 文建, “スイッチングコンバータの基礎,” コロナ社, 1992.
- [2] K. Kit Sum, Switch mode power conversion, Marcel Dekker, Inc., 1984.
- [3] D. H. Wolaver, “Basic constraints from graph theory for dc-to-dc conversion networks,” *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-19, pp. 640 - 648, November 1972.
- [4] R. Tymerski and V. Vorpérian, “Generation, classification and analysis of switched-mode DC-to-DC converters by the use of converter cells,” *Proc. of IEEE INELEC*, pp.181-195, 1986.
- [5] J. Chen, D. Maksimović, and R. Erickson, “Buck-boost PWM converters having two independently controlled switches,” *Power Electronics Specialists Conference*, 2001. PESC. 2001 IEEE 32nd Annual, vol.2, pp.736-741, 2001.
- [6] T. Nishi, T. Ogishima, and M. Ogata, “Topological conditions on switched mode dc-dc converters,” *ITC-CSCC'02*, pp.1129-1132, July 2002.
- [7] M. Ogata and T. Nishi, “Graph-theoretical approach to 2-switch DC-DC converters,” *Int. J. Circ. Theor. Apply.*, vol.33, pp.161-173, 2005.
- [8] M. Ogata and T. Nishi, “Graph-theoretic approach to the design of four-switch DC-DC converters,” *Proc. of IS-CAS2005*, pp.768-771, May 2005.
- [9] J. Vandewalle and L. O. Chua, “The colored branch theorem and its applications in circuit theory,” *IEEE Trans.*

*Circuit Theory*, vol. CAS-27, pp.816-825, September, 1980.

[10] 梶谷 洋司, 回路のためのグラフ理論, 昭晃堂, 1979.

[11] 藤重 悟, グラフ・ネットワーク・組合せ論 (工系数学講座 18), 共立出版, 2002.

## 接続構造に基づく DC-DC コンバータ回路の構成法

緒方 将人<sup>†</sup> 西 哲生<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 九州産業大学工学部電気工学科 〒 813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1

<sup>††</sup> 早稲田大学理工学部 〒 169-0072 新宿区大久保 2-4-12

E-mail: <sup>†</sup>mogata@te.kyusan-u.ac.jp, <sup>††</sup>nishi-t@waseda.jp

あらまし DC-DC コンバータは、直流電圧を任意の直流電圧値に変換する回路である。本稿では、回路素子の接続構造に関するスイッチ方式コンバータの必要十分条件から、全てのコンバータ回路を目の子算で網羅できる構成法を検討した。

キーワード スイッチング方式 DC-DC コンバータ, 回路接続構造, 回路合成

## DC-DC converter network synthesis based on topological conditions

Masato OGATA<sup>†</sup> and Tetsuo NISHI<sup>††</sup>

<sup>†</sup> Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu Sangyo University,  
2-3-1 Matsukadai, Higashi-ku, Fukuoka, 812-8581 Japan

<sup>††</sup> Waseda University, 2-4-12 Ookubo, Sinjyuku-ku, Tokyo, 169-0072 Japan

E-mail: <sup>†</sup>mogata@te.kyusan-u.ac.jp, <sup>††</sup>nishi-t@waseda.jp

**Abstract** This paper presents a graph-theoretic approach to synthesize switch-mode DC-DC converters. The proposed method is based on the necessary and sufficient conditions for a network with ideal switches to be a converter and can provide complete families of converters systematically without the combinational complexity.

**Key words** Switch-mode DC-DC converter, Circuit topology, Circuit synthesis

### 1. はじめに

電子機器のオンボード電源に最も多用される DC-DC コンバータは、直流電圧を任意の電圧値に変換する電力変換器である。スイッチング方式 DC-DC コンバータ回路の基本的な構成素子は、スイッチ（ダイオード）、キャパシタ及びインダクタであり、電圧変換率から「昇降圧型」、「降圧型」及び「昇降圧型」に分類することができる [1], [2]。

位相幾何学的アプローチ、すなわち回路素子の接続構造に着目して、コンバータの様々な性質が明らかにされている [3]-[5]。Tymerski らは、コンバータ回路を図 1 のように入力端子、出力端子、および共通接地端子からなる三端子コンバータセルの電圧変換率に関する性質を明らかにし、14 種類の三端子コンバータセルを与えている [4]。Chen らは、4 スイッチコンバータの直流等価回路と交流等価回路に関する条件を求めている [5]。しかしながら、これらの研究の導出は発見的であり、全てのコンバータセルや条件を網羅しているかどうか明らかにされていない。

一方、著者らは、スイッチング方式コンバータの状態平均方程式に対して位相幾何学的アプローチを適用し、コンバータの

電圧変換率を決定する回路構造に関する必要十分条件を導出した [6]-[8]。コンバータであるための必要十分条件は、直流動作時における電源、出力抵抗およびスイッチの接続構造と、交流動作時におけるスイッチの接続構造から成り立っており、このことは、「コンバータに対応するグラフが、ある二つの部分グラフを同時に含んでいる、そのときに限る」と言い換えることができる。

全てのコンバータを網羅して導出するには、直流動作と交流動作における接続構造に対応する二つの部分グラフを同時に満たしながら、インダクタとキャパシタに相当する枝を加える操作が必要となる。 $k$  個の節点からなるグラフに、「枝の開放操作」の逆操作「枝の付加」を行うと、

$$\frac{1}{2}k(k+1)$$

通りの異なるグラフ（ただし、付加した枝が自己閉路となる場合も含む）が復元される。一方、「枝の短絡操作」の逆操作である「一つの節点を二点へ分離+分離した節点間への枝の付加」を適用すると、

$$\frac{1}{2}(2^{d_1} + 2^{d_2} + \dots + 2^{d_k})$$

通りの異なるグラフが導かれる。ただし、 $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) は節点  $i$  の次数をあらわす。これらのことから、全てのコンバータを網羅するには、かなり多数のグラフを調べなければならないことが予想される。本稿では、目の子勘定で全てのコンバータを網羅できる構成法について検討を行う。

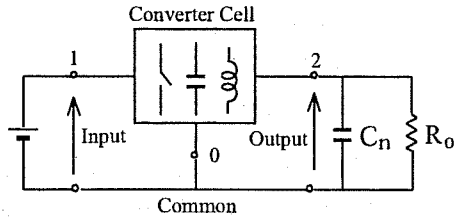


図1 対象となる回路  $N$

本稿の議論を進める上で必要な部分グラフ [9]、グラフ操作、およびグラフの連結性 [10] を定義する。

[定義 1]  $Q_1$  と  $Q_2$  を、グラフ  $G$  における互いに素な部分枝集合とすると、グラフ  $G$  に対して  $Q_1$  を短絡除去し、 $Q_2$  を開放除去して得られる部分グラフを  $G(Q_1 : Q_2)$  と記す。

[定義 2] グラフ  $G$  において、枝  $b_1$  と  $b_2$  はそれぞれ節点  $(v_1, v_2)$  と  $(v_2, v_3)$  間に接続されている。このとき、 $S(b_1 : b_2)$  は枝  $b_1$  を  $b_2$  に沿って滑べらせ、枝  $b_1$  を新たに節点  $(v_1, v_3)$  間に接続させるグラフ操作とする (図 2)。特に、枝  $b_1$  と  $b_2$  がパスに同方向 (反対方向) に含まれている場合、グラフ操作を  $S^+(b_1 : b_2)$  ( $S^-(b_1 : b_2)$ ) と記す。

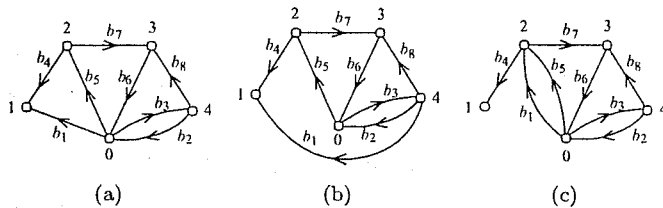


図2 定義2の例。(a) 枝  $b_1$  と  $b_2$  はパス  $\{b_1, b_2\}$  に沿って同方向に含まれている。一方、枝  $b_1$  と  $b_4$  の向きはパス  $\{b_1, b_4\}$  に沿って反対となっている。(b) (a) のグラフに対して、 $S(b_1 : b_2)$  ( $S^+(b_1 : b_2)$ ) と適用して得られたグラフ。(c) (a) のグラフに  $S(b_1 : b_4)$  ( $S^+(b_1 : b_4)$ ) を適用したグラフ。

[定義 3] グラフ  $G$  において、相違なる任意の二つの節点  $u, v$  に対し、節点  $u$  から  $v$  への道が存在するとき、連結 (または、1 連結) であるという。任意の非負整数  $l < k$  に対して、次の条件 (i), (ii) を満たす二つの部分グラフ  $H_i$  ( $i = 1, 2$ ) が存在しないとき、グラフ  $G$  を  $k$  連結であるという。

- (i)  $B_1 \cup B_2 = A$ ,  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$
- (ii)  $W_1 \setminus W_2 \neq \emptyset$ ,  $W_2 \setminus W_1 \neq \emptyset$ ,  $W_1 \cup W_2 = V$ ,  $|W_1 \cap W_2| = l$

ただし、 $A$  と  $V$  は、それぞれグラフ  $G$  の節点集合と枝集合、 $B_i$  と  $W_i$  は、それぞれ部分グラフ  $H_i$  ( $i = 1, 2$ ) の節点集合と枝集合をあらわす。

## 2. 接続構造に関する必要十分条件

対象となる回路  $N$  (図 1) は、 $m$  個のインダクタ  $L_i$  ( $i = 1, \dots, m$ )、 $n$  個のキャパシタ  $C_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )、直流電圧源  $E$ 、出力抵抗  $R_o$ 、及び  $k$  個の理想スイッチ  $S_i$  ( $i = 1, \dots, k$ )、の回路素子から構成されている。ここで、 $k$  個の理想スイッチは次のように二つのクラスに分割する。

$$S_I = \{S_1, \dots, S_{k_1}\} \quad S_{II} = \{S_{k_1+1}, \dots, S_k\}$$

回路  $N$  の動作に関して、次のように仮定する。

[仮定 1] 回路  $N$  は 2 つのフェーズで動作する。フェーズ 1 では、クラス  $S_I$  に属するスイッチが ON、クラス  $S_{II}$  に属するスイッチが OFF となる。フェーズ 2 では、フェーズ 1 とのスイッチ状態が逆になる。フェーズ 1 とフェーズ 2 の 1 スイッチング周期中の継続時間をそれぞれ  $D$  と  $D'$  とし、1 スイッチング周期及びフェーズ 1 と 2 の時比率を

$$D_{total} = D + D', \quad d \equiv \frac{D}{D_{total}}, \quad d' \equiv \frac{D'}{D_{total}}$$

とする。

[仮定 2] スイッチング周波数は回路  $N$  の固有周波数に比べて十分高いものとする。

回路  $N$  に対応する有向グラフ  $G$  とする。グラフ  $G$  を構成する枝はそれぞれ回路素子に対応づける。例えば、回路  $N$  中のインダクタ  $L_i$  はグラフ  $G$  における枝  $L_i$  とする。枝の向きは適当に与えられているものとする。グラフ  $G$  について次のような仮定をする。

[仮定 3] 出力抵抗  $R_o$  とキャパシタの一つは互いに並列に接続されている。また、電圧源  $E$  と出力抵抗  $R_o$  の一方の端子は接地されている。

[仮定 4] 電圧源枝  $E$  とキャパシタ枝からなる閉路 (タイセット)、及びキャパシタ枝のみからなる閉路は存在しない。

[仮定 5] インダクタ枝のみからなるカットセットは存在しない。

[仮定 6] 電圧源枝  $E$ 、キャパシタ枝、クラス  $S_I$  に属するスイッチ枝からなる閉路は存在しない。また、電圧源枝  $E$ 、キャパシタ枝、クラス  $S_{II}$  に属するスイッチ枝からなる閉路は存在しない。

[仮定 7] インダクタ枝、クラス  $S_I$  に属するスイッチ枝からなるカットセットは存在しない。また、インダクタ枝、クラス  $S_{II}$  に属するスイッチ枝からなるカットセットは存在しない。

仮定 2~6 から、次の性質が得られる。

[性質 1] グラフ  $G$  において枝  $E$ ,  $C \equiv \{C_i\}$  と  $S_I$  に属するスイッチ枝は木  $T$  をなす。また、 $E$  と  $C$  と  $S_{II}$  に属するスイッチ枝は別の木  $T'$  をなす。

性質 1 から、次の性質が成り立つ。

[性質 2] クラス  $S_I$  と  $S_{II}$  に属するスイッチ数は同数である。したがって、回路  $N$  に含まれるスイッチ数  $k$  は偶数である。

状態平均化法により、回路  $N$  の定常出力  $v_o$  は連立一次方程式からされる。連立一次方程式が不定 (解が定まらない) もしくは不能 (解が存在しない) でないことから、次の補題が成り

立つ。

[補題 1] 回路  $N$  中に含まれるインダクタとキャパシタの個数は等しい、すなわち  $m = n$  のときに限られる。

スイッチ個数  $k = 2$  の場合、回路  $N$  の定常出力  $v_o$  は次の通りとなる。

[性質 3]  $k = 2$  の場合、回路  $N$  の定常出力  $v_o$  は、全て表 1 に分類できる。

昇降圧型	$\pm \frac{d'}{d} E$ または $\pm \frac{d}{d'} E$
昇圧型	$\pm \frac{d+d'}{d} E$ または $\pm \frac{d'}{d+d'} E$
降圧型	$\pm \frac{d}{d+d'} E$ または $\pm \frac{d'}{d+d'} E$

表 1 定常出力  $v_o$  の分類 ( $k = 2$  の場合)

回路  $N$  の定常出力  $v_o$  が表 1 中の昇降圧型、昇圧型、もしくは降圧型となるための接続構造に関する必要十分条件は次の通りとなる。

[定理 1] グラフ  $G$  が次の三条件を同時に満足するとき、またそのときに限り、回路  $N$  は昇降圧型コンバータ (2 スイッチ) となる。

- インダクタ枝とキャパシタ枝の数が同数である。
- グラフ  $G(C, E : L, R_o)$  が枝  $S_1$  と  $S_2$  からなる閉路である。
- グラフ  $G(L : C)$  が図 3(a) となる。ただし、図 3(a) のグラフにおいて、 $S_1$  と  $S_2$  は交換可能であり、枝の向きは任意である。

[定理 2] グラフ  $G$  が次の三条件を同時に満足するとき、またそのときに限り、回路  $N$  は昇圧型コンバータ (2 スイッチ) となる。

- インダクタ枝とキャパシタ枝の数が同数である。
- グラフ  $G(C, E : L, R_o)$  と  $G(L, R_o : C, E)$  が  $S_1$  と  $S_2$  からなる同方向閉路である。
- グラフ  $G(L : C)$  が図 3(b) となる。ただし、図 3(b) のグラフにおいて、 $S_1$  と  $S_2$  は交換可能であり、枝の向きは任意である。

降圧型の必要十分条件については、定理 2 中の部分グラフ  $G(L : C)$  を図 3(c) とする。

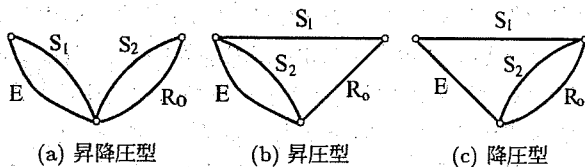


図 3 部分グラフ  $G(L : C)$  (2 スイッチの場合)

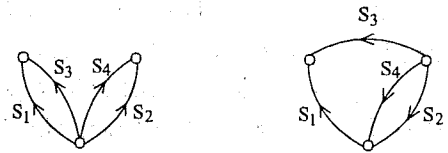
回路  $N$  にスイッチが 4 つ含まれる場合 ( $k = 4$ )、定常出力  $v_o$  の分母・分子多項式は、時比率  $d$  と  $d'$  に関する二次の同時多項式となる。したがって、回路  $N$  が一次の昇降圧型電圧変換率  $- \frac{d'}{d} (= 1 - \frac{1}{d})$  を実現するためには 4 つのタイプが存在する。

$$(I) - \frac{dd'}{d^2} \quad (II) - \frac{d'^2}{dd'} \quad (III) - \frac{d'(d+d')}{d(d+d')} \quad (IV) - \frac{d'(d-d')}{d(d-d')}$$

タイプ (I) の電圧変換率の回路構造に関する条件は次の通りとなる。

[定理 3] 部分グラフ  $G(C, E : L, R_o)$  が図 4(a) の接続 (cascaded connection) をもつものとする。このとき、回路  $N$  がタイプ (I) の電圧変換率をもつ昇降圧型コンバータとなるには、次の条件 i) ~ iv) のうち一つを満足することが必要十分である<sup>(注1)</sup>。

- グラフ  $G(L, S_2 : C, S_4)$  が図 5(a) の接続構造をもち、かつ、グラフ  $G(L : C)$  にスイッチ枝  $S_2$  と  $S_4$  を同時に含む閉路が存在しない。
- グラフ  $G(L, S_1 : C, S_3)$  が図 5(b) の接続構造をもち、かつ、グラフ  $G(L : C)$  にスイッチ枝  $S_1$  と  $S_3$  を同時に含む閉路が存在しない。
- グラフ  $G(L : C)$  が図 5(c) の接続構造をもつ<sup>(注2)</sup>。
- グラフ  $G(L : C)$  が図 5(d) の接続構造をもつ。



(a) cascaded connection (b) traversed connection

図 4 部分グラフ  $G(C, E : L, R_o)$

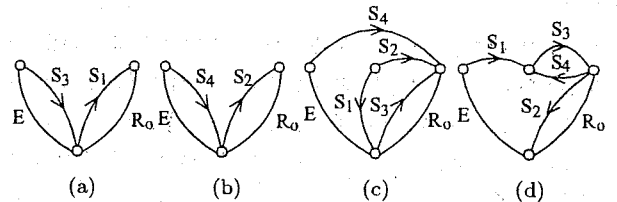


図 5 定理 3 のグラフ

[定理 4] グラフ  $G(C, E : L, R_o)$  が図 4(b) の接続 (traversed connection) をもつものとする。グラフ  $G(L : C)$  に対して、 $S(S_1 : S_2)$  を適用して得られるグラフを  $g$  とする。このとき、回路  $N$  がタイプ (I) の電圧変換率をもつ昇降圧型コンバータとなるには、次の条件 i) ~ iv) のうち一つを満足することが必要十分である。

- グラフ  $g(S_2 : S_4)$  が図 5(a) の接続構造をもち、かつ、グラフ  $g$  にスイッチ枝  $S_2$  と  $S_4$  を同時に含む閉路が存在しない。
- グラフ  $g(S_1 : S_3)$  が図 5(b) の接続構造をもち、かつ、グラフ  $g$  にスイッチ枝  $S_1$  と  $S_3$  を同時に含む閉路が存在しない。
- グラフ  $g$  が図 5(c) の接続構造をもつ
- グラフ  $g$  が図 5(d) の接続構造をもつ。

タイプ (II) ~ (IV) の電圧変換率に関する接続構造条件についても同様となる。

(注1) : 理想スイッチは極性を有さないにもかかわらず、図 5 中のスイッチ枝の向きはきわめて重要である。これは、グラフ  $G(C, E : L, R_o)$  でスイッチ枝の向きを図 4(a) を満足するように与えているためである。したがって、スイッチ枝  $S_1$  と  $S_3$  ( $S_2$  と  $S_4$ ) の向きは相対的に関係している、すなわち、図 5 で枝  $S_1$  の向きを逆にした場合、枝  $S_3$  の向きも連動して変えなければ条件は成立しない。  
(注2) : 図 5(c) において、枝  $S_1$  と  $S_3$  をそれぞれ枝  $S_2$  と  $S_4$  で置き換えてたグラフも含む。図 5(d) についても同様である。

### 3. 接続構造に基づく構成法

定理1から、2スイッチ昇降圧型コンバータ回路を構成するには、次に記す問題を解くことになる。

問題1] (2スイッチ昇降圧型コンバータの構成問題) 同数のインダクタ枝とキャパシタ枝を与えることにより、スイッチ枝 $S_1$ と $S_2$ からなる閉路である部分グラフ $G(C, E: L, R_o)$ と、図3(a)となる部分グラフ $G(L: C)$ を同時に満足するグラフ $G$ を構成せよ。ただし、グラフ $G$ は3連結[10]である。

この構成問題に対する最も基本的なアプローチは、一つの部分グラフに対し、「枝の短絡操作」と「枝の開放操作」の逆操作を適用し元のグラフを復元し、さらに、復元されたグラフに対し、もう一方の部分グラフが含まれているかどうか判別する方法である。

このアプローチで、インダクタ枝とキャパシタ枝をそれぞれ一本ずつ付加した場合を考えてみる。まず、図3(a)の部分グラフ $G(L: C)$ に対し、「インダクタ枝の短絡操作」の逆操作である「二点の分離及び枝の付加」=「枝の挿入」を適用すると、2通りのグラフ $G(\emptyset: C)$ が得られる。さらに、それぞれのグラフ $G(\emptyset: C)$ に、キャパシタ枝の付加を行うと、120通りのグラフ $G$ が復元される<sup>(注3)</sup>。120通りのグラフ $G$ の中で、もう一方の部分グラフ $G(C, E: L, R_o)$ を満足するのはわずか二つである<sup>(注4)</sup>。

インダクタ枝とキャパシタ枝をもう一組ずつ加える場合には、さらに多数のグラフを調べる必要となり、基本的なアプローチは2スイッチコンバータ回路を網羅できる構成法とはいいがたい。本稿では、次に記すアプローチで問題の解となるグラフ $G$ を網羅的に構成する。

接続構造に基づく構成法 (2スイッチの場合)

手順1: グラフ $G(L: C)$ において、枝 $E$ の端点に $a, b$ 、枝 $R_o$ の端点を $a, c$ とラベルを与える。

手順2: グラフ $G(C, E: L, R_o)$ の節点にラベル $A, B$ を与える。

手順3: 6個の節点を準備し、 $2 \times 3$ に配置する(図6)。横の二つの行をそれぞれ行 $A$ と行 $B$ 、縦の三つの列に対して、列 $b$ 、および列 $c$ と呼ぶ。また、行 $A$ と列 $a$ に属する節点を $(A, a)$ とラベルを与える。他の5つの節点についても同様にラベルを与える。

手順4: 枝 $E$ を二つの節点 $(A, a)$ と $(A, b)$ 間に接続する。また、枝 $R_o$ を節点 $(A, a)$ と $(A, c)$ 間に接続する。

手順5: グラフ $G(L: C)$ と $G(C, E: L, R_o)$ における節点のラベルに基づき手順3で準備した節点間に、枝 $S_1$ と $S_2$ を接続する。

手順6: インダクタ枝とキャパシタ枝を1つずつ加える。ただし、インダクタ枝及びキャパシタ枝は、それぞれは同じ列と行に属する節点間のみに接続する。なお、最初のキャパシタ枝は必ず枝 $R_o$ に対して並列に接続する。

手順7: 非連結成分、関節点、および自己カットセット枝が存在しなければ、構成問題の解であるグラフ $G$ となる。もし、これらのいずれかが存在する場合は、手順6に戻る。

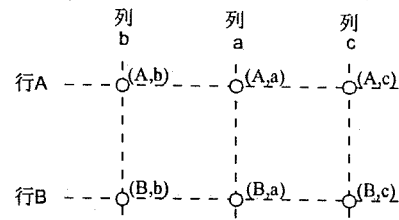


図6 手順3で準備する $2 \times 3$ に配置する節点

上記の構成法の実例は次節で紹介し、以降は紹介した構成法をコンバータを満たすグラフと対応させて説明する。

まず、グラフにおいて二つの節点 $i$ と $j$ を結ぶパスが存在するとき、節点 $i$ と $j$ とは連結であるという。この二つの節点間の関係は、グラフの節点集合における等値関係をなす。したがって、連結性から節点集合を互いに等値なものの集合の非共通和となる部分集合に一意的に類別できる。

2スイッチ昇降圧型コンバータに対応するグラフ $G$ において、インダクタ枝のみからなる道によるグラフ $G$ の連結性を考えてみる。このとき、図3の部分グラフ $G(L: C)$ から、節点集合 $V$ は非共通和となる三つの部分集合

$$V = V_a \cup V_b \cup V_c \quad (1)$$

に一意的に分割できる。部分集合をそれぞれ一つの節点によって置き換え、節点集合の添字 $a, b, c$ でラベル付けする(手順1)。

一方、キャパシタ枝と電圧源枝 $E$ のみからなる道の連結性から、節点集合 $V$ は

$$V = V_A \cup V_B \quad (2)$$

と分割でき、前述のように部分集合を一つの節点によって置き換え、ラベル $A, B$ を与える(手順2)。

式(1)と(2)における部分集合の直積集合を考えると、節点集合 $V$ は

$$V = V_{(A,a)} \cup V_{(A,b)} \cup V_{(A,c)} \cup V_{(B,a)} \cup V_{(B,b)} \cup V_{(B,c)} \quad (3)$$

と非共通和で分割できる。式(3)における部分集合の代表元として、それぞれ一つの節点によって置き換える。これら6個の節点をそれぞれ集合の添字でラベル付けする(手順3)。式(1)の分割に着目すると、図3のグラフ $G(L: C)$ から、枝 $E$ は節点 $a$ と $b$ 間に接続されている。一方、式(2)の分割では、枝 $E$ の両端点は $A$ となっていると一般性を失うことなく仮定できる。したがって、直積集合(3)の関係および仮定3から、枝 $E$ は節点 $(A, a)$ と $(A, b)$ 間に、枝 $R_o$ は節点 $(A, a)$ と $(A, c)$ 間に接続されている(手順4)。枝 $S_1$ および $S_2$ の端点も式(1)と(2)の分割から同様に決定される(手順5)。

連結性による等値関係から、インダクタ枝は節点 $(A, a)$ と $(B, a)$ 間、 $(A, b)$ と $(B, b)$ 間、もしくは $(A, c)$ と $(B, c)$ 間のいずれか、すなわち同じ列に属する節点間に接続されている。同様に、キャパシタ枝は同じ行に属する節点間に接続している。

注3): ただし、自己閉路となるキャパシタ枝も含まれている

注4): これらの2つのグラフ $G$ は二同型グラフの関係にあるため、電気回路としては同じとなる



(手順 6).

以上のように、前記の構成法はコンバータを満足するグラフ  $G$  において、式 (3) の節点部分集合と、節点集合間に対する枝の接続関係に着目した手法であると理解できる。4 スイッチコンバータの構成問題も  $3 \times 4 = 12$  個の節点を準備して、同様な手順により構成することができる。

#### 4. 構成例

前節で記した手順にしたがって、2 スイッチ昇降圧型コンバータを構成する。まず、グラフ  $G(L : C)$  と  $G(C, E : L, R_o)$  の節点にラベル付けする (図 7)。6 個の節点を  $2 \times 3$  に配置して準備し、節点にラベルを与える (図 6)。

枝  $E$  を節点  $(A, a)$  と  $(A, b)$  間、枝  $R_o$  を節点  $(A, a)$  と  $(A, c)$  間に接続する (図 8)。

図 7 から、枝  $S_1$  は節点  $(A, a)$  と  $(B, b)$  間、もしくは節点  $(A, b)$  と  $(B, a)$  間に接続できる。枝  $S_2$  も節点  $(A, a)$  と  $(B, c)$ 、 $(A, c)$  と  $(B, a)$  間のいずれかに接続している。ここでは、図 9 のように枝  $S_1$ 、 $S_2$  および  $R_o$  を接続する場合について議論をすすめてゆく。

図 9(a) に一對のインダクタ枝とキャパシタ枝を加える。手順 6 に記した通り、最初のキャパシタ枝は枝  $R_o$  に対して並列に加える。インダクタ枝については三通りの入れ方がある。しかしながら、節点  $(A, b)$  と  $(B, b)$  間以外の二通りはインダクタ枝が自己カットセット枝となる。したがって、インダクタ枝を節点  $(A, b)$  と  $(B, b)$  間に接続する (図 10(a))。この場合、完成した図 10(a) のグラフ  $G$  に対応する基本昇降圧コンバータ回路 (図 10(b)) が得られる。

図 9(b) に一對のインダクタ枝とキャパシタ枝を加える。この場合、インダクタ枝をどう加えても自己カットセット枝が存在する。手順 6 に戻って、インダクタ枝とキャパシタ枝をもう一對追加する (図 11(a))。このとき、キャパシタ枝は行  $A$  の節点に接続すると、枝  $E$  およびキャパシタ枝からなる閉路ができるため、仮定 4 に反する。したがって、キャパシタ枝は行  $B$  の節点に接続する。キャパシタ枝の加え方には三通りがあるが、閉節点および自己カットセット枝を生じさせない加え方は、節点  $(B, b)$  と  $(B, c)$  間に接続する場合に限られる。このとき、インダクタ枝は、節点  $(A, c)$  と  $(B, c)$  間に接続する (図 11(b))。完成したグラフ  $G$  は Cuk 回路 (図 11(c)) に対応する。

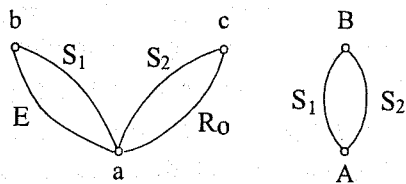


図 7 節点にラベル付けたグラフ  $G(L : C)$  と  $G(C, E : L, R_o)$

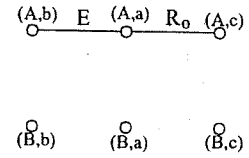


図 8 枝  $E$  と  $R_o$  を加えたグラフ (手順 4)

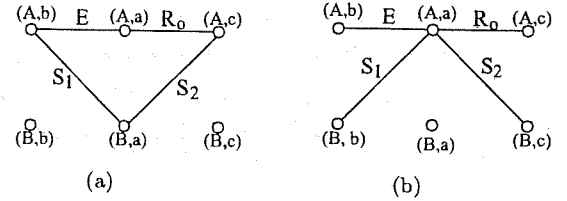


図 9 手順 5 適用後のグラフ

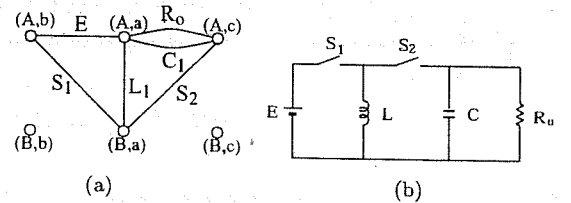
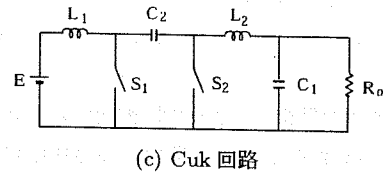
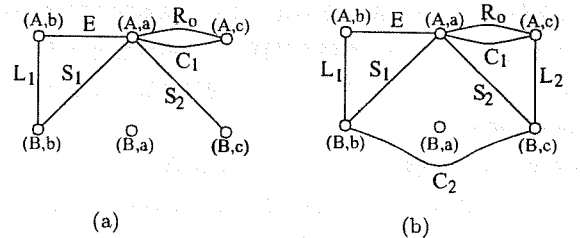


図 10 図 9(a) に手順 6 を適用したグラフと対応するコンバータ回路



(c) Cuk 回路

図 11 図 9(b) に手順 6 を適用したグラフと対応するコンバータ回路

#### 5. む す び

本稿では、回路素子の接続構造に関するスイッチ方式コンバータの必要十分条件から、全てのコンバータ回路を目の子算で網羅できる構成法を検討した。具体的な構成例では 2 スイッチの場合のみ検討したが、4 スイッチの場合の構成法も同様に議論することができる。

#### 文 献

- [1] 原田 耕介, 二宮 保, 顧 文建, “スイッチングコンバータの基礎,” コロナ社, 1992.
- [2] K.Kit Sum, Switch mode power conversion, Marcel Dekker,

- Inc., 1984.
- [3] D. H. Wolaver, "Basic constraints from graph theory for dc-to-dc conversion networks," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-19, pp. 640 - 648, November 1972.
  - [4] R. Tymerski and V. Vorperian, "Generation, classification and analysis of switched-mode DC-to-DC converters by the use of converter cells," *Proc. of IEEE INELEC*, pp.181-195, 1986.
  - [5] J. Chen, D. Maksimović, and R. Erickson, "Buck-boost PWM converters having two independently controlled switches," *Power Electronics Specialists Conference, 2001. PESC. 2001 IEEE 32nd Annual*, vol.2, pp.736-741, 2001.
  - [6] T. Nishi, T. Ogishima, and M. Ogata, "Topological conditions on switched mode dc-dc converters," *ITC-CSCC'02*, pp.1129-1132, July 2002.
  - [7] M. Ogata and T. Nishi, "Topological criteria for switched mode dc-dc converters," *Proc. of ISCAS2003*, vol.3 pp.184-187, May 2003.
  - [8] M. Ogata and T. Nishi, "Graph-theoretic approach to the design of four-switch DC-DC converters," *Proc. of ISCAS2005*, pp.768-771, May 2005.
  - [9] 梶谷 洋司, 回路のためのグラフ理論, 昭晃堂, 1979.
  - [10] 藤重 悟, グラフ・ネットワーク・組合せ論 (工系数学講座 18), 共立出版, 2002.

# SAW フィルタの設計理論

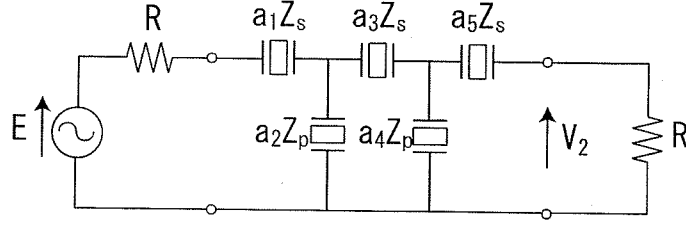


図 1: SAW フィルタの例

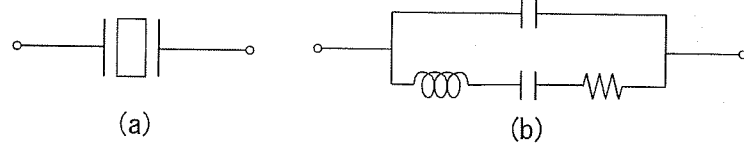


図 2: SAW 素子の記号 (a) とその集中定数等価回路 (b)

図 1 の回路について考える。ここで、 $z_s$ ,  $z_p$  は SAW 素子で図 2 のような形をしており、

$$z_s = k_s \frac{s^2 + \omega_0^2}{s(s^2 + \alpha)} \quad (1)$$

$$z_p = k_p \frac{s^2 + \beta}{s(s^2 + \omega_0^2)} \quad (2)$$

ただし、

$$\left. \begin{array}{l} k_s, k_p > 0 \\ 0 < \beta < \omega_0^2 < \alpha < \infty \end{array} \right\} \quad (3)$$

## 1 必要条件

簡単のため、次に仮定をする。

仮定 1: 回路は対称とする (図ではこの場合を描いている)。

したがって図 (a), (b) のアドミタンス行列を  $Y_a$ ,  $Y_b$  とすると

$$Y_a = \begin{bmatrix} \frac{s(s^2 + \alpha)}{s^2 + \omega_0^2} & -\frac{s(s^2 + \alpha)}{s^2 + \omega_0^2} \\ -\frac{s(s^2 + \alpha)}{s^2 + \omega_0^2} & \frac{s(s^2 + \alpha)}{s^2 + \omega_0^2} \end{bmatrix} \quad (k_s = 1, k_p = 1 \text{ としておく}) \quad (4)$$

$$Y_b = Z_b^{-1} \quad (5)$$

$$Z_b = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + \beta}{s(s^2 + \omega_0^2)} + sL & sL' \\ sL' & \frac{s^2 + \beta}{s(s^2 + \omega_0^2)} + sL \end{bmatrix} \quad (L \neq L' \text{ としておく}) \quad (6)$$

$$|Z_b| = \frac{(s^2 + \beta)^2}{s^2(s^2 + \omega_0^2)^2} + s^2 L^2 + \frac{2L(s^2 + \beta)}{s^2 + \omega_0^2} - s^2 L'^2 \quad (7)$$

$$= \frac{(s^2 + \beta)^2 + s^4(s^2 + \omega_0^2)^2 L^2 + 2Ls^2(s^2 + \beta)(s^2 + \omega_0^2) - s^4 L'^2(s^2 + \omega_0^2)^2}{s^2(s^2 + \omega_0^2)^2} \quad (8)$$

$$= \frac{(s^2 + \beta)^2 + s^4(s^2 + \omega_0^2)^2(L^2 - L'^2) + 2Ls^2(s^2 + \beta)(s^2 + \omega_0^2)}{s^2(s^2 + \omega_0^2)^2} \quad (9)$$

したがって

$$Y_b = \frac{s^2(s^2 + \omega_0^2)^2}{(s^2 + \beta)^2 + s^4(s^2 + \omega_0^2)^2(L^2 - L'^2) + 2Ls^2(s^2 + \beta)(s^2 + \omega_0^2)} \quad (10)$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{s^2 + \beta}{s(s^2 + \omega_0^2)} + sL & -sL' \\ -sL' & \frac{s^2 + \beta}{s(s^2 + \omega_0^2)} + sL \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{Ls(s^2 + \omega_0^2)N_{b11}}{D_b} & -\frac{L's^3(s^2 + \omega_0^2)^2}{D_b} \\ -\frac{L's^3(s^2 + \omega_0^2)^2}{D_b} & \frac{Ls(s^2 + \omega_0^2)N_{b22}}{D_b} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$D_b = (s^2 + \beta)^2 + s^4(s^2 + \omega_0^2)^2(L^2 - L'^2) + 2Ls^2(s^2 + \beta)(s^2 + \omega_0^2) \quad (13)$$

ここで

$$D_b \text{ は } s \text{ の } 8 \text{ 次の偶多項式、 } N_{b11} \text{ は } s \text{ の } 4 \text{ 次の偶多項式} \quad (14)$$

$Y_b = [y_{bij}]$  と書くと、式 (4)(11)(12)(13) から分かるように

$$1) \quad Y_b(0) = 0 \quad (15)$$

$$2) \quad Y_b \text{ の } (1, 2) \text{ 要素 } y_{b12} \text{ は } s = 0 \text{ に } 3 \text{ 位の零点をもつ (2 位といっても実質は同じ)} \quad (16)$$

$$3) \quad Y_b(\infty) = 0 \quad (17)$$

$$4) \quad Y_b(j\omega_0) = 0 \quad (18)$$

$$5) \quad Y_b \text{ の } (1, 2) \text{ 要素 } y_{b12} \text{ は } s = j\omega_0 \text{ に } 2 \text{ 位の零点をもつ} \quad (19)$$

$$6) \quad Y = Y_a + Y_b = \begin{bmatrix} \frac{sN_{11}}{(s^2 + \omega_0^2)D_b} & -\frac{sN_{12}}{(s^2 + \omega_0^2)D_b} \\ -\frac{sN_{21}}{(s^2 + \omega_0^2)D_b} & \frac{sN_{22}}{(s^2 + \omega_0^2)D_b} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$7) \quad (s^2 + \omega_0^2)D_b \text{ は } 10 \text{ 次の偶多項式} \quad (21)$$

$$8) \quad N_{11}(= N_{22}) \text{ は } 10 \text{ 次の偶多項式} \quad (22)$$

$$9) \quad N_{12} \text{ は } 10 \text{ 次の偶多項式} \quad (23)$$

$$10) \quad Y(0) = 0, \text{ 特に、 } Y \text{ の } (1, 2) \text{ 要素 } y_{12} \text{ は } s = 0 \text{ に } 1 \text{ 位の零点をもつ} \quad (24)$$

$$11) \quad Y(s) \text{ の各要素はいずれも } s = \infty \text{ に極をもち、留数行列は } \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \text{ の形} \quad (25)$$

$$12) \quad Y(s) \text{ の各要素は } s = j\omega_0 \text{ に極をもち、留数行列は } \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \text{ の形} \quad (26)$$

以上は、 $Y_b(s)$ ,  $Y(s)$  の形から直ぐに分かる必要条件である。これらの条件間には従属関係があるかも知れないし、また、これらが構成の十分条件になっているかどうか分からない（多分ならない）。これらの条件を  $S$  行列で表現し、構成条件と伝送特性（減衰特性）の両方を考慮出来ればよい。そのためには、取りあえず、上記の条件 1)～13) を  $S$  行列の記号を用いて書き直そう。

## 2 $S$ 行列の標準形と $Y$ 行列

回路の  $S$  行列を次の標準形で書く。

$$S = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} h & f \\ f & \mp h_* \end{bmatrix} \quad (27)$$

ここで

$$1) \quad gg_* = ff_* + hh_* \quad (28)$$

$$2) \quad g \text{ は Hurwitz 多項式} \quad (29)$$

$$3) \quad f \text{ は偶または奇多項式} \quad (30)$$

$$4) \quad \text{式 (27) の複号 } \mp \text{ は } f \text{ の偶奇により上下を取る} \quad (31)$$

回路は対称としているので、 $\mp h_* = h$  となることから、

$$\phi(s) = h(s)/f(s) \text{ は奇関数} \quad (32)$$

回路の形から

$$f(0) = 0, \text{ すなわち, } f(s) = s^\nu f'(s), \quad f'(0) \neq 0 \quad (33)$$

$$\text{式 (24) から } \nu = 1, \text{ したがって } f(s) \text{ は奇多項式} \quad (34)$$

これと式 (32) から  $h(s)$  は偶多項式。これらのことから、

$$g = g_e + sg_o \quad (35)$$

$$f = sf_o \quad (36)$$

$$h = h_e \quad (37)$$

とおける。ここで添え字  $e, o$  は偶部、奇部（から  $s$  を除いた偶多項式）。このとき  $Y$  は次のように書ける。

$$Y = \frac{1}{g_e + h_e} \begin{bmatrix} sg_o & -sf_o \\ -sf_o & sg_o \end{bmatrix} \quad (38)$$

### 3 条件 1)～13) の検討 ( $S$ 行列に対する必要条件)

#### 3.1 $s = j\omega_0$ が減衰零点となる条件

$s = j\omega_0$  で  $|f/g| = 1$  であるから、これと式 (28) より、 $h(j\omega_0) = h_e(j\omega_0) = 0$ , すなわち

$$h_e = (s^2 + \omega_0^2)h'_e \quad (39)$$

#### 3.2 式 (26) ( $Y$ が $s = j\omega_0$ に極をもつ条件) について

式 (39) のもとで、 $Y$  が  $s = j\omega_0$  に極をもつためには、式 (38) より

$$g_e = (s^2 + \omega_0^2)g'_e \quad (40)$$

式 (28), (39), (40) より

$$(s^2 + \omega_0^2)^2 (g_e'^2 - h_e'^2) = s^2 (g_o^2 - f_o^2) \quad (41)$$

式 (41) は基本的な式である。

##### 3.2.1 $Y$ の $s = j\omega_0$ の留数行列

(26) について考える。 $s = j\omega_0$  の留数行列  $K_{\omega_0}$  は

$$K_{\omega_0} = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} Y \quad (42)$$

$$= \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s^2 + \omega_0^2) \begin{bmatrix} \frac{g_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} & -\frac{f_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} \\ -\frac{f_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} & \frac{g_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{g_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} & -\frac{f_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} \\ -\frac{f_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} & \frac{g_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} \end{bmatrix} \quad (44)$$

これと式 (26) から

$$g_o(j\omega_0) = f_o(j\omega_0) \quad (45)$$

すなわち、

$$g_o - f_o \text{ は因数 } (s^2 + \omega_0^2) \text{ を含む。} \quad (46)$$

ところで、式 (41) により、 $g_o^2 - f_o^2$  は  $(s^2 + \omega_0^2)^2$  の因数を含むが、もしも  $g_o(j\omega_0) + f_o(j\omega_0) = 0$  とすると、式 (45) により  $g_o(j\omega_0) = f_o(j\omega_0) = 0$  となり、式 (26) に反する。結局

$$g_o - f_o = (s^2 + \omega_0^2)^2 \phi_1(s), \quad \phi_1(j\omega_0) \neq 0 \quad (47)$$

### 3.3 $Y$ の $s = \infty$ の留数

$\deg g_o = 10$  であるから、式 (25) のためには  $\deg (g_e + h_e) = 10$  となる。このときもしも  $\deg g_e = 12$  とすると、回路の次数が 12 次となるが、図??の回路の  $g$  は高々 11 次である。したがって、

$$\deg g \text{ は奇数で、これを } 2n + 1 \text{ とする。今の場合は、} n = 5 \quad (48)$$

これらのことから、式 (25) のためには、

$$\deg g_e = \deg g_o = \deg f_o = \deg h_e = 2n (= 10) \quad (49)$$

式 (25) は、

$$g_o \text{ と } f_o \text{ の最高次の係数は等しい} \quad (50)$$

これらのことから次数に関することをまとめておくと、

$$\begin{aligned} \deg g_e &= \deg g_o = \deg f_o = \deg h_e = 10 \\ \deg (g_e + h_e) &= \deg (g_e - h_e) = \deg (g_o + f_o) = 10, \quad \deg (g_o - f_o) = 8 \\ \deg g'_e &= \deg h'_e = \deg (g'_e + h'_e) = \deg (g'_e - h'_e) = 8 \end{aligned} \quad (51)$$

$s = \infty$  の極の留数の留数行列  $K_\infty$  は

$$K_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} Y = \lim_{s \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{g_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} & -\frac{f_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} \\ -\frac{f_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} & \frac{g_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{g_o}{s^2(g'_e + h'_e)} & -\frac{f_o}{s^2(g'_e + h'_e)} \\ -\frac{f_o}{s^2(g'_e + h'_e)} & \frac{g_o}{s^2(g'_e + h'_e)} \end{bmatrix} \quad (53)$$

ここで式 (50) を用いると

$$K_\infty = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \quad (54)$$

り形である。

$$b_g \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g_o}{s^2(g'_e + h'_e)}, \quad b_f \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f_o}{s^2(g'_e + h'_e)} \quad (55)$$

とおく。

$$b_g = b_f (\equiv b \text{ とおく}) \quad (56)$$

### 3.4 式 (24) ( $s = 0$ で $Y = 0$ である条件) について

一方、 $s = 0$  に関しては、式 (41) より、 $g'_e(0)^2 = h'_e(0)^2$  であるから、式 (24) のためには

$$g_e(0) + h_e(0) \neq 0, \quad g_e(0) = h_e(0) \neq 0 \quad (57)$$

としておく必要がある (式 (24) により  $f_o(0) \neq 0$  である)。

式 (21)～(24) は、式 (40)～(57) により満足される。

### 3.5 $Y$ から $s = \infty$ 及び $s = j\omega_0$ の極の抜き取り

( $Y$  から  $z_s$  を抜き取った残りのアドミタンス行列  $\tilde{Y}$ )

$$\tilde{Y} \equiv Y - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} K_{\omega_0} - s K_\infty \quad (58)$$

とおく。すなわち

$$\widetilde{y}_{11} \equiv \frac{sg_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{g_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} - b_g s \quad (\equiv a_g(s) \text{ とおく}) \quad (59)$$

$$-\widetilde{y}_{12} \equiv \frac{sf_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{f_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} - b_f s \quad (\equiv a_f(s) \text{ とおく}) \quad (60)$$

$a_g(j\omega_0)$  を計算

$$\frac{a_g(s)}{s} = \frac{g_o(g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)) - g_o(j\omega_0)(g'_e + h'_e)}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)(g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0))} - b_g \quad (61)$$

$$\lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{a_g(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{\left. \frac{dg_o}{ds} \right|_{s=j\omega_0} (g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)) - g_o(j\omega_0) \left. \frac{d}{ds} [g'_e + h'_e] \right|_{s=j\omega_0}}{2s(g'_e + h'_e)(g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0))} - b_g \quad (62)$$

$$= \frac{\left. \frac{dg_o}{ds} \right|_{s=j\omega_0} (g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)) - g_o(j\omega_0) \left. \frac{d}{ds} [g'_e + h'_e] \right|_{s=j\omega_0}}{2j\omega_0 [g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)]^2} - b_g \quad (63)$$

$$= \frac{1}{2j\omega_0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{g_o}{g'_e + h'_e} \right] \Big|_{s=j\omega_0} - b_g \quad (64)$$

$g_o, g'_e, h'_e, f_o$  は  $s^2$  の関数であるから

$$x \equiv s^2 \quad (65)$$

とおき、(若干記号の乱用であるが)

$$g_o \equiv g_o(x), \quad g'_e \equiv g'_e(x), \quad h'_e \equiv h'_e(x), \quad f_o \equiv f_o(x) \quad (66)$$

と書く。このとき、式 (179) は次のようになる。

$$\lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{a_g(s)}{s} = \frac{1}{2j\omega_0} \frac{d}{dx} \left[ \frac{g_o}{g'_e + h'_e} \right] \frac{dx}{ds} \Big|_{s=j\omega_0} - b_g \quad (67)$$

$$= \frac{d}{dx} \left[ \frac{g_o}{g'_e + h'_e} \right] \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_g \quad (68)$$

$$\lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{a_f(s)}{s} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{f_o}{g'_e + h'_e} \right] \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_f \quad (69)$$

ところで、式 (173) の  $\widetilde{Y}$  は  $Y_b$  であるから、式 (14)～(19) を満たす必要がある。以下これについて調べる。

### 3.6 式 (15) ( $Y_b(0) = 0$ ) について

$$a_g(0) = 0, \quad a_f(0) = 0 \quad (70)$$

であるから、式 (15) は満足されている。

### 3.7 式 (16) ( $y_{b12}$ が $s = 0$ に 2 位の零点をもつこと) について

このためには

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{a_f(s)}{s} = 0 \quad (71)$$

式 (175) を用いると

$$\frac{f_o(0)(g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)) - f_o(j\omega_0)(g'_e(0) + h'_e(0))}{\omega_0^2(g'_e(0) + h'_e(0))(g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0))} - b_f = 0 \quad (72)$$

式 (26) より

$$g_e'^2 - h_e'^2 \text{ は } s = 0 \text{ に 2 位の零点をもつ} \quad (73)$$

$$g_e' - h_e' \text{ は } s = 0 \text{ に 2 位の零点をもつ} \quad (74)$$

$$g_e'(0) = h_e'(0) \neq 0 \quad (75)$$

等が得られるが、これらを用いても (187) は簡単になりそうもない。

### 3.8 式(17)( $Y_b(\infty) = 0$ )について

$a_g(s)$  の三つの項のうち第2項は  $s = \infty$  で0であるから、第1項と第3項について調べればよい。 $b_g$  の定義により、

$$\left| \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sg_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} - b_g s \right| < +\infty \quad (76)$$

一方

$$\frac{sg_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} - b_g s \text{ は奇関数} \quad (77)$$

であるから、式(191), (192) より、

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{sg_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} - b_g s \right\} = 0 \quad (78)$$

### 3.9 式(18)( $Y_b(j\omega_0) = 0$ )について

式(182)–(184)により

$$a_g(j\omega_0) = j\omega_0 \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{g_o}{g'_e + h'_e} \right) \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_g \right\} = 0 \quad (79)$$

$$a_f(j\omega_0) = j\omega_0 \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{f_o}{g'_e + h'_e} \right) \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_g \right\} = 0 \quad (80)$$

したがって

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{g_o}{g'_e + h'_e} \right) \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_g = 0 \quad (81)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f_o}{g'_e + h'_e} \right) \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_f = 0 \quad (82)$$

が成り立つ必要がある。

式(56) が成り立っていれば、式(196), (197) より、

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{g_o - f_o}{g'_e + h'_e} \right) \Big|_{x=-\omega_0^2} = 0 \quad (83)$$

一方式(47) より、

$$g_o - f_o = (x + \omega_0^2)^2 \phi_1(x) \quad (84)$$

であるから、式(199)のもとで、式(196), (197) のいずれか一方が成り立てばよい。どちらを要請する方がよいかわからないが、

$$\text{式(197) が成り立っているとする。} \quad (85)$$

以下、メモの式(190)–(199)を省略する。式(200)以降を記述する。

## 1 部分分数形でのパラメータによる表現

式(190)–(199)において多数の条件式が導かれているが、これらはかなり複雑な式であり、これらを満たす関数を求め、さらにこれらが所望の特性を持つようにするのは容易ではない。これらを満たす  $g_e, g_o, h_e, f_o$  をどう定めるかという問題がある。特に、これらは、Feldkeller の関係式を満たす必要があり、これだけでも結構難しい。

以下では各多項式の情報を部分分数形で与え、そのパラメータを用いて前述の諸条件を書き直す。

$$\deg g_e = \deg g_o = \deg h_e = \deg f_o = 10 \quad (86)$$

、 $g_e, g_o, h_e, f_o$  を偶多項式とし、かつ  $g_e + sg_o$  が Hurwitz 多項式とすると、 $sg_o/g_e$  はリアクタンズ関数となり、その零点は単純で虚軸上にのみあることになる。 $g'_e, h'_e$  は8次の偶多項式で、虚軸上にのみ零点を持つ。



一般性を失うことなく、

$$g'_e = (s^2 + \gamma_1)(s^2 + \gamma_2)(s^2 + \gamma_3)(s^2 + \gamma_4) \quad (87)$$

とおき、必要があれば、

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4 \quad (88)$$

としておく。式 (41)(Feldkeller) :

$$(s^2 + \omega_0^2)^2 (g_e'^2 - h_e'^2) = s^2 (g_o^2 - f_o^2) \quad (89)$$

の両辺を  $(s^2 + \omega_0^2)^2 g_e'^2$  で割ると、

$$1 - \frac{h_e'^2}{g_e'^2} = \frac{s(g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \cdot \frac{s(g_o + f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (90)$$

ここで

$$\frac{sg_o}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} = \delta_g s + \frac{\delta_{g0}s}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{gi}s}{s^2 + \gamma_i} \quad (91)$$

$$\frac{sf_o}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} = \delta_f s + \frac{\delta_{f0}s}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{fi}s}{s^2 + \gamma_i} \quad (92)$$

と部分分数展開すると、

$$\delta_g, \delta_{g0}, \delta_{gi} > 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (93)$$

式 (199) により  $g_o - f_o$  は  $(s^2 + \omega_0^2)^2$  の因数をもつので、式 (205) の右辺第 1 項は  $s = j\omega_0$  に 1 位の零点をもつ。また式 (56) と併せてこのことは、

$$\delta_{g0} = \delta_{f0}, \quad \delta_g = \delta_f \quad (94)$$

と選ぶ必要がある。このことと式 (205) 右辺第 1 項が  $s = j\omega_0$  に 1 位の零点をもつことから、

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{gi} - \delta_{fi}}{-\omega_0^2 + \gamma_i} = 0 \quad (95)$$

が必要条件になる。

ところで、 $g(=g_e + sg_o)$  を決めても  $f_o, h_e'$  は決まるわけではなく、また  $f_o, h_e'$  の一方を任意に決められると言うわけでもない。通常は  $g$  や  $f$  に対して、Feldkeller の公式により  $h$  は因数の組み合わせ方によりかなり多数の選び方が出来るが、今の場合、 $h = h_e$  は偶多項式であるから、この組み合わせによる不定さはない。

$g$  に対して  $f_o$  を適当に選ぶことにより、式 (205) から  $h_e'$  が ( $\pm 1$  の不定性は別として) 一意的に定まる。式 (205) は、

$$\left(1 - \frac{h_e'}{g_e'}\right) \cdot \left(1 + \frac{h_e'}{g_e'}\right) = \frac{s(g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \cdot \frac{s(g_o + f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (96)$$

と書けるので、

$$1 - \frac{h_e'}{g_e'} = \frac{s(g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (97)$$

$$1 + \frac{h_e'}{g_e'} = \frac{s(g_o + f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (98)$$

とするのが自然であるようにも見えるが、これは明らかに不可である。なぜならば、式 (213) で左辺は  $s = j\omega_0$  に極をもたないが、右辺は  $s = j\omega_0$  に極をもつからである。さらに、式 (212)、(213) の右辺は奇関数であるが、左辺は偶関数である。なお、 $g_o + f_o$  が  $s = j\omega_0$  に零点を持つようにすると、式 (56) と矛盾する結果となり、ダメである。

式 (212)、(213) のような分解を考えるとすると、次のようなことが考えられる。

$$1 - \frac{h_e'}{g_e'} = k \cdot \frac{s^2 + c}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{s^2(g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (99)$$

$$1 + \frac{h_e'}{g_e'} = \frac{1}{k} \cdot \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + c} \cdot \frac{g_o + f_o}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (100)$$

式 (214), (215) の分解の方針は次の通り。

- 1)  $g_o - f_o$  は  $s = j\omega_0$  に 2 位の零点を持つので、これをうち消すように式 (214) の分母に  $s^2 + \omega_0^2$  をかける。
- 2) 式 (50) により  $g_o - f_o$  は  $2n - 2$  次となるので、因数  $s^2$  は式 (214) の方に全部入れる ( $s$  を分けて入れるのは奇関数、偶関数の関係で不可)。
- 3) 式 (214)(215) の因数  $s^2 + c$  は、次数が  $2n$  (分母子とも) となるように入れた。 $c$  は今から決める定数。
- 4) 式 (214)(215) の  $k$  は今から決める定数。
- 5) 式 (215) で二つの因数の  $s^2 + \omega_0^2$  はキャンセルする。
- 6) 式 (215) で因数  $s^2 + c$  は  $g_o + f_o$  の因数とキャンセルするように定める。すなわち、

$$g_o + f_o = 0|_{s^2 = -c} = 0 \quad (101)$$

以下では式 (214)(215) とすることの可否、及び上記 1)~6) と出来るか否かについて調べる。 $g'_e, h'_e$  は同次の偶多項式であるから

$$\frac{h'_e}{g'_e} = \delta_h + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{hi}}{s^2 + \gamma_i} \quad (\delta_h \neq 0) \quad (102)$$

と書ける。式 (214)、(206)、(207)、(209) より

$$\frac{s^2 + c}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{s^2(g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g'_e} = \frac{s^2 + c}{s^2 + \omega_0^2} \sum_{i=1}^4 \frac{(\delta_{gi} - \delta_{fi})s^2}{s^2 + \gamma_i} (\equiv F(s) \text{ とおく}) \quad (103)$$

のとき

$$F(\infty) = \sum_{i=1}^4 (\delta_{gi} - \delta_{fi}) \quad (104)$$

があり、式 (210) が成立しているとしているので、

$$F(s) = F(\infty) + \sum_{i=1}^4 \frac{\eta_i}{s^2 + \gamma_i} \quad (105)$$

と書ける。ここで、

$$\eta_i \equiv \lim_{s \rightarrow j\sqrt{\gamma_i}} (s^2 + \gamma_i) F(s) \quad (106)$$

$$= \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} (\delta_{gi} - \delta_{fi})(-\gamma_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (107)$$

方、式 (215)(206)(207)(210) により、

$$\frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + c} \cdot \frac{g_o + f_o}{(s^2 + \omega_0^2)g'_e} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + c} \left[ 2\delta_g + \frac{2\delta_{g0}}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{gi} + \delta_{fi}}{s^2 + \gamma_i} \right] (\equiv G(s) \text{ とおく}) \quad (108)$$

たがって、

$$G(\infty) = 2\delta_g \quad (109)$$

た  $s^2 + c$  の因数が  $G(s)$  の分母に入らないためには

$$2\delta_g + \frac{2\delta_{g0}}{\omega_0^2 - c} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{gi} + \delta_{fi}}{\gamma_i - c} = 0 \quad (110)$$

成り立つことが必要。またこれらの条件の下で

$$G(s) = G(\infty) + \sum_{i=1}^4 \frac{\xi_i}{s^2 + \gamma_i} \quad (111)$$

と書ける。ここで

$$\xi_i \equiv \lim_{s \rightarrow j\sqrt{\gamma_i}} (s^2 + \gamma_i) G(s) \quad (112)$$

$$= \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} (\delta_{gi} + \delta_{fi}) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (113)$$

となる。式 (214)(215) の両式を加えると左辺は 2 となるので、

$$2 = \sum_{i=1}^4 \frac{k\eta_i}{s^2 + \gamma_i} + \sum_{i=1}^4 \frac{\frac{1}{k}\xi_i}{s^2 + \gamma_i} + kF(\infty) + \frac{1}{k}G(\infty) \quad (114)$$

これが恒等的に成立することから

$$k\eta_i + \frac{1}{k}\xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (115)$$

$$kF(\infty) + \frac{1}{k}G(\infty) = 2 \quad (116)$$

式 (230), (231) に (218), (222), (224), (228) を代入すると

$$k \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} (\delta_{gi} - \delta_{fi}) (-\gamma_i) + \frac{1}{k} \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} (\delta_{gi} + \delta_{fi}) = 0 \quad (117)$$

$$k \sum_{i=1}^4 (\delta_{gi} - \delta_{fi}) + \frac{1}{k} 2\delta_g = 2 \quad (118)$$

式 (232) は、

$$k^2 \left( \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} \right)^2 \gamma_i (\delta_{gi} - \delta_{fi}) = \delta_{gi} + \delta_{fi} \quad (119)$$

となる。これから

$$\delta_{gi} > |\delta_{fi}| \quad (120)$$

と選ぶ必要があることが分かる。なぜなら、式 (232) が成り立つとして、もしも

$$\delta_{gi} - \delta_{fi} \leq 0, \quad \delta_{gi} + \delta_{fi} \leq 0 \quad (121)$$

とすると、これらの 2 式の和から、 $\delta_{gi} \leq 0$  となり、これは式 (208) に反するからである。  
いま

$$a_i \equiv \delta_{gi} - \delta_{fi}, \quad b_i \equiv \delta_{gi} + \delta_{fi} \quad (122)$$

とおくと、式 (234) は

$$k^2 \left( \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} \right)^2 \gamma_i a_i = b_i \quad (123)$$

したがって、

$$\delta_{gi} = \frac{1}{2}(a_i + b_i) = \frac{1}{2} \left[ 1 + k^2 \left( \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} \right)^2 \gamma_i \right] a_i \quad (124)$$

このことは、 $\delta_{gi} > 0$  とすることは、式 (234) のもとで、

$$a_i > 0 \quad \text{or} \quad b_i > 0 \quad (125)$$

と選べばよいことになる。

なお、式 (215) から式 (214) を引くことにより、

$$2 \frac{h'_e}{g'_e} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^4 \frac{\xi_i}{s^2 + \gamma_i} - k \sum_{i=1}^4 \frac{\eta_i}{s^2 + \gamma_i} + \frac{1}{k} \cdot 2\delta_g \quad (126)$$

これと、式 (217) より

$$\frac{1}{k} \cdot \delta_g = \delta_h \quad (127)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} \xi_i - k \eta_i \right) = \delta_{hi} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (128)$$

となり、 $g'_e, g_o, f_o$  から  $h'_e$  が一意的に求まることになる。

式 (243) に式 (222)(228) を代入すると、

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k} \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} (\delta_{gi} + \delta_{fi}) - k \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} (\delta_{gi} - \delta_{fi}) (-\gamma_i) \right] = \delta_{hi} \quad (129)$$

すなわち、

$$\frac{1}{2k} \left( \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} \right) \left[ (\delta_{gi} + \delta_{fi}) + k^2 \left( \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} \right)^2 (\delta_{gi} - \delta_{fi})(\gamma_i) \right] = \delta_{hi} \quad (130)$$

式(245)の[ ]の中の第2項は式(234)により  $\delta_{gi} + \delta_{fi}$  であるから、式(245)は

$$\frac{1}{k} \left( \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} \right) (\delta_{gi} + \delta_{fi}) = \delta_{hi} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (131)$$

したがって、式(246), (242)により、 $\delta_h, \delta_{hi}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) は、 $\delta_g, \delta_{gi} + \delta_{fi}$  で簡潔に表されることになる。

#### 4.1 諸条件の書き換え

次式は基本的な関係式である。

$$(s^2 + \omega_0^2)^2 (g_e'^2 - h_e'^2) = s^2 (g_o^2 - f_o^2) \quad (132)$$

式(132)は基本的な式である。この式を満たすパラメータの決め方を以下に纏める。

$$\frac{sg_o}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} = \delta_g s + \frac{\delta_{g0}s}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{gi}s}{s^2 + \gamma_i} \quad (133)$$

$$\frac{sf_o}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} = \delta_f s + \frac{\delta_{f0}s}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{fi}s}{s^2 + \gamma_i} \quad (134)$$

と部分分数展開すると、

$$\delta_g, \delta_{g0}, \delta_{gi} > 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (135)$$

$$\frac{h_e'}{g_e'} = \delta_h + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{hi}}{s^2 + \gamma_i} \quad (\delta_h \neq 0) \quad (136)$$

$$1 - \frac{h_e'}{g_e'} = k \cdot \frac{s^2 + c}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{s^2 (g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (137)$$

$$1 + \frac{h_e'}{g_e'} = \frac{1}{k} \cdot \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + c} \cdot \frac{g_o + f_o}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (138)$$

$$\text{式(137), (133), (134), (??)} \Rightarrow \frac{s^2 + c}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{s^2 (g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} = \frac{s^2 + c}{s^2 + \omega_0^2} \sum_{i=1}^4 \frac{(\delta_{gi} - \delta_{fi})s^2}{s^2 + \gamma_i} (\equiv F(s) \text{ とおく}) \quad (139)$$

$$F(s) = F(\infty) + \sum_{i=1}^4 \frac{\eta_i}{s^2 + \gamma_i}, \quad F(\infty) = \sum_{i=1}^4 (\delta_{gi} - \delta_{fi}) \quad (140)$$

$$\eta_i \equiv \lim_{s \rightarrow j\sqrt{\gamma_i}} (s^2 + \gamma_i) F(s) = \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} (\delta_{gi} - \delta_{fi})(-\gamma_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (141)$$

一方、

$$\text{式(138)(133)(134)(??)} \Rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + c} \cdot \frac{g_o + f_o}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + c} \left[ 2\delta_g + \frac{2\delta_{g0}}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{gi} + \delta_{fi}}{s^2 + \gamma_i} \right] (\equiv G(s) \text{ とおく}) \quad (142)$$

$$s^2 + c \text{ の因数が } G(s) \text{ の分母に入らない条件 } 2\delta_g + \frac{2\delta_{g0}}{\omega_0^2 - c} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{gi} + \delta_{fi}}{\gamma_i - c} = 0 \quad (143)$$

が成り立つことが必要。またこれらの条件の下で

$$G(s) = G(\infty) + \sum_{i=1}^4 \frac{\xi_i}{s^2 + \gamma_i}, \quad G(\infty) = 2\delta_g \quad (144)$$

$$\xi_i \equiv \lim_{s \rightarrow j\sqrt{\gamma_i}} (s^2 + \gamma_i) G(s) = \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} (\delta_{gi} + \delta_{fi}) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (145)$$

$$\text{式(137)(138)} \Rightarrow 2 = \sum_{i=1}^4 \frac{k\eta_i}{s^2 + \gamma_i} + \sum_{i=1}^4 \frac{\frac{1}{k}\xi_i}{s^2 + \gamma_i} + kF(\infty) + \frac{1}{k}G(\infty) \quad (146)$$

↓

$$k\eta_i + \frac{1}{k}\xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad kF(\infty) + \frac{1}{k}G(\infty) = 2 \quad (147)$$

式(??), (147) に (139), (141), (??), (145) を代入すると

$$k \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} (\delta_{gi} - \delta_{fi}) (-\gamma_i) + \frac{1}{k} \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} (\delta_{gi} + \delta_{fi}) = 0, \quad k \sum_{i=1}^4 (\delta_{gi} - \delta_{fi}) + \frac{1}{k} 2\delta_g = 2 \quad (148)$$

$$\text{式(??)} \quad k^2 \left( \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} \right)^2 \gamma_i (\delta_{gi} - \delta_{fi}) = \delta_{gi} + \delta_{fi} \quad (149)$$

$$a_i \equiv \delta_{gi} - \delta_{fi}, \quad b_i \equiv \delta_{gi} + \delta_{fi} \quad (150)$$

とおくと、式(149) は

$$k^2 \left( \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} \right)^2 \gamma_i a_i = b_i \quad (151)$$

したがって、

$$\delta_{gi} = \frac{1}{2}(a_i + b_i) = \frac{1}{2} \left[ 1 + k^2 \left( \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} \right)^2 \gamma_i \right] a_i \quad (152)$$

このことは、 $\delta_{gi} > 0$  とすることは、式(149) のもとで、

$$a_i > 0 \quad \text{or} \quad b_i > 0 \quad (153)$$

$$\text{式(138) - 式(137)} \quad 2 \frac{h'_e}{g'_e} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^4 \frac{\xi_i}{s^2 + \gamma_i} - k \sum_{i=1}^4 \frac{\eta_i}{s^2 + \gamma_i} + \frac{1}{k} \cdot 2\delta_g \quad (154)$$

↓(式(136))

$$\frac{1}{k} \cdot \delta_g = \delta_h, \quad \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} \xi_i - k \eta_i \right) = \delta_{hi} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (155)$$

$$\text{式(??)} \Rightarrow \frac{1}{k} \left( \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} \right) (\delta_{gi} + \delta_{fi}) = \delta_{hi} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \frac{1}{k} \cdot \delta_g = \delta_h \quad (156)$$

#### 4.1.1 $Y$ の $s = j\omega_0$ の留数行列

(26) について考える。 $s = j\omega_0$  の留数行列  $K_{\omega_0}$  は

$$K_{\omega_0} = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} Y \quad (157)$$

$$= \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s^2 + \omega_0^2) \begin{bmatrix} \frac{g_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} & -\frac{f_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} \\ -\frac{f_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} & \frac{g_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} \end{bmatrix} \quad (158)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{g_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} & -\frac{f_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} \\ -\frac{f_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} & \frac{g_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} \end{bmatrix} \quad (159)$$

これと式(26) から

$$g_o(j\omega_0) = f_o(j\omega_0) \quad (160)$$

すなわち、

$$g_o - f_o \text{ は因数 } (s^2 + \omega_0^2) \text{ を含む。} \quad (161)$$

ところで、式(132) により、 $g_o^2 - f_o^2$  は  $(s^2 + \omega_0^2)^2$  の因数を含むが、もしも  $g_o(j\omega_0) + f_o(j\omega_0) = 0$  とすると、式(160) により  $g_o(j\omega_0) = f_o(j\omega_0) = 0$  となり、式(26) に反する。結局

$$g_o - f_o = (s^2 + \omega_0^2)^2 \phi_1(s), \quad \phi_1(j\omega_0) \neq 0 \quad (162)$$

## 1.2 $Y$ の $s = \infty$ の留数

$\deg g_o = 10$  であるから、式 (25) のためには  $\deg (g_e + h_e) = 10$  となる。このときもしも  $\deg g_e = 12$  とすると、回路の次数が 12 次となるが、図??の回路の  $g$  は高々 11 次である。したがって、

$$\deg g \text{ は奇数で、これを } 2n + 1 \text{ とする。今の場合は、} n = 5 \quad (163)$$

これらのことから、式 (25) のためには、

$$\deg g_e = \deg g_o = \deg f_o = \deg h_e = 2n (= 10) \quad (164)$$

式 (25) は、

$$g_o \text{ と } f_o \text{ の最高次の係数は等しい} \quad (165)$$

これらのことから次数に関することをまとめておくと、

$$\begin{aligned} \deg g_e &= \deg g_o = \deg f_o = \deg h_e = 10 \\ \deg (g_e + h_e) &= \deg (g_e - h_e) = \deg (g_o + f_o) = 10, \quad \deg (g_o - f_o) = 8 \\ \deg g'_e &= \deg h'_e = \deg (g'_e + h'_e) = \deg (g'_e - h'_e) = 8 \end{aligned} \quad (166)$$

$s = \infty$  の極の留数の留数行列  $K_\infty$  は

$$K_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} Y = \lim_{s \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{g_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} & -\frac{f_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} \\ -\frac{f_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} & \frac{g_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} \end{bmatrix} \quad (167)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{g_o}{s^2(g'_e + h'_e)} & -\frac{f_o}{s^2(g'_e + h'_e)} \\ -\frac{f_o}{s^2(g'_e + h'_e)} & \frac{g_o}{s^2(g'_e + h'_e)} \end{bmatrix} \quad (168)$$

ここで式 (165) を用いると

$$K_\infty = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \quad (169)$$

形である。

$$b_g \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g_o}{s^2(g'_e + h'_e)}, \quad b_f \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f_o}{s^2(g'_e + h'_e)} \quad (170)$$

おく。

$$b_g = b_f (\equiv b \text{ とおく}) \quad (171)$$

## 3 式 (24) ( $s = 0$ で $Y = 0$ である条件) について

一方、 $s = 0$  に関しては、式 (132) より、 $g'_e(0)^2 = h'_e(0)^2$  であるから、式 (24) のためには

$$g_e(0) + h_e(0) \neq 0, \quad g_e(0) = h_e(0) \neq 0 \quad (172)$$

しておく必要がある (式 (24) により  $f_o(0) \neq 0$  である)。

式 (21)～(24) は、式 (??)～(172) により満足される。

## 4 $Y$ から $s = \infty$ 及び $s = j\omega_0$ の極の抜き取り

( $Y$  から  $z_s$  を抜き取った残りのアドミタンス行列  $\tilde{Y}$ )

$$\tilde{Y} \equiv Y - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} K_{\omega_0} - s K_\infty \quad (173)$$

とおく。すなわち

$$\widetilde{y}_{11} \equiv \frac{sg_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{g_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} - b_g s \quad (\equiv a_g(s) \text{ とおく}) \quad (174)$$

$$-\widetilde{y}_{12} \equiv \frac{sf_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{f_o(j\omega_0)}{g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)} - b_f s \quad (\equiv a_f(s) \text{ とおく}) \quad (175)$$

$a_g(j\omega_0)$  を計算

$$\frac{a_g(s)}{s} = \frac{g_o(g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)) - g_o(j\omega_0)(g'_e + h'_e)}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)(g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0))} - b_g \quad (176)$$

$$\lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{a_g(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{\left. \frac{dg_o}{ds} \right|_{s=j\omega_0} (g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)) - g_o(j\omega_0) \left. \frac{d}{ds} [g'_e + h'_e] \right|_{s=j\omega_0}}{2s(g'_e + h'_e)(g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0))} - b_g \quad (177)$$

$$= \frac{\left. \frac{dg_o}{ds} \right|_{s=j\omega_0} (g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)) - g_o(j\omega_0) \left. \frac{d}{ds} [g'_e + h'_e] \right|_{s=j\omega_0}}{2j\omega_0[g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)]^2} - b_g \quad (178)$$

$$= \frac{1}{2j\omega_0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{g_o}{g'_e + h'_e} \right] \Big|_{s=j\omega_0} - b_g \quad (179)$$

$g_o, g'_e, h'_e, f_o$  は  $s^2$  の関数であるから

$$x \equiv s^2 \quad (180)$$

とおき、(若干記号の乱用であるが)

$$g_o \equiv g_o(x), \quad g'_e \equiv g'_e(x), \quad h'_e \equiv h'_e(x), \quad f_o \equiv f_o(x) \quad (181)$$

と書く。このとき、式 (179) は次のようになる。

$$\lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{a_g(s)}{s} = \frac{1}{2j\omega_0} \frac{d}{dx} \left[ \frac{g_o}{g'_e + h'_e} \right] \frac{dx}{ds} \Big|_{s=j\omega_0} - b_g \quad (182)$$

$$= \frac{d}{dx} \left[ \frac{g_o}{g'_e + h'_e} \right] \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_g \quad (183)$$

$$\lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{a_f(s)}{s} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{f_o}{g'_e + h'_e} \right] \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_f \quad (184)$$

ところで、式 (173) の  $\tilde{Y}$  は  $Y_b$  であるから、式 (14)~(19) を満たす必要がある。以下これについて調べる。

#### 4.5 式 (15) ( $Y_b(0) = 0$ ) について

$$a_g(0) = 0, \quad a_f(0) = 0 \quad (185)$$

であるから、式 (15) は満足されている。

#### 4.6 式 (16) ( $y_{b12}$ が $s = 0$ に 2 位の零点をもつこと) について

このためには

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{a_f(s)}{s} = 0 \quad (186)$$

式 (175) を用いると

$$\frac{f_o(0)(g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0)) - f_o(j\omega_0)(g'_e(0) + h'_e(0))}{\omega_0^2(g'_e(0) + h'_e(0))(g'_e(j\omega_0) + h'_e(j\omega_0))} - b_f = 0 \quad (187)$$

式 (26) より

$$g_e'^2 - h_e'^2 \text{ は } s = 0 \text{ に 2 位の零点をもつ} \quad (188)$$

$$g_e' - h_e' \text{ は } s = 0 \text{ に 2 位の零点をもつ} \quad (189)$$

$$g_e'(0) = h_e'(0) \neq 0 \quad (190)$$

等が得られるが、これらを用いても (187) は簡単になりそうもない。

#### 4.7 式(17)( $Y_b(\infty) = 0$ )について

$a_g(s)$  の三つの項のうち第2項は  $s = \infty$  で0であるから、第1項と第3項について調べればよい。 $b_g$  の定義により、

$$\left| \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sg_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} - b_g s \right| < +\infty \quad (191)$$

一方

$$\frac{sg_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} - b_g s \text{ は奇関数} \quad (192)$$

であるから、式(191), (192) より、

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{sg_o}{(s^2 + \omega_0^2)(g'_e + h'_e)} - b_g s \right\} = 0 \quad (193)$$

#### 4.8 式(18)( $Y_b(j\omega_0) = 0$ )について

式(182)-(184) により

$$a_g(j\omega_0) = j\omega_0 \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{g_o}{g'_e + h'_e} \right) \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_g \right\} = 0 \quad (194)$$

$$a_f(j\omega_0) = j\omega_0 \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{f_o}{g'_e + h'_e} \right) \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_g \right\} = 0 \quad (195)$$

したがって

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{g_o}{g'_e + h'_e} \right) \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_g = 0 \quad (196)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f_o}{g'_e + h'_e} \right) \Big|_{x=-\omega_0^2} - b_f = 0 \quad (197)$$

が成り立つ必要がある。

式(56) が成り立っていれば、式(196), (197) より、

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{g_o - f_o}{g'_e + h'_e} \right) \Big|_{x=-\omega_0^2} = 0 \quad (198)$$

一方式(47) より、

$$g_o - f_o = (x + \omega_0^2)^2 \phi_1(x) \quad (199)$$

あるから、式(199) のもとで、式(196), (197) のいずれか一方が成り立てばよい。どちらを要請する方がよいかわからないが、

$$\text{式(197) が成り立っているとする。} \quad (200)$$

以下、メモの式(190)~(199) を省略する。式(200) 以降を記述する。

### 部分分数形でのパラメータによる表現

式(190)~(199) において多数の条件式が導かれているが、これらはかなり複雑な式であり、これらを満たす関数を求め、さらにこれらが所望の特性を持つようにするのは容易ではない。これらを満たす  $g_e, g_o, h_e, f_o$  をどう定めるかという問題がある。特に、これらは、Feldkeller の関係式を満たす必要があり、これだけでも結構難しい。

以下では各多項式の情報を部分分数形で与え、そのパラメータを用いて前述の諸条件を書き直す。

$$\deg g_e = \deg g_o = \deg h_e = \deg f_o = 10 \quad (201)$$

$g_e, g_o, h_e, f_o$  を偶多項式とし、かつ  $g_e + sg_o$  が Hurwitz 多項式とすると、 $sg_o/g_e$  はリアクタンズ関数となり、その零点は単純で虚軸上にのみあることになる。 $g'_e, h'_e$  は8次の偶多項式で、虚軸上にのみ零点を持つ。



一般性を失うことなく、

$$g'_e = (s^2 + \gamma_1)(s^2 + \gamma_2)(s^2 + \gamma_3)(s^2 + \gamma_4) \quad (202)$$

とおき、必要があれば、

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4 \quad (203)$$

としておく。式 (41)(Feldkeller) :

$$(s^2 + \omega_0^2)^2 (g_e'^2 - h_e'^2) = s^2 (g_o^2 - f_o^2) \quad (204)$$

の両辺を  $(s^2 + \omega_0^2)^2 g_e'^2$  で割ると、

$$1 - \frac{h_e'^2}{g_e'^2} = \frac{s(g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \cdot \frac{s(g_o + f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (205)$$

ここで

$$\frac{sg_o}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} = \delta_g s + \frac{\delta_{g0}s}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{gi}s}{s^2 + \gamma_i} \quad (206)$$

$$\frac{sf_o}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} = \delta_f s + \frac{\delta_{f0}s}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{fi}s}{s^2 + \gamma_i} \quad (207)$$

と部分分数展開すると、

$$\delta_g, \delta_{g0}, \delta_{gi} > 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (208)$$

式 (199) により  $g_o - f_o$  は  $(s^2 + \omega_0^2)^2$  の因数をもつので、式 (205) の右辺第 1 項は  $s = j\omega_0$  に 1 位の零点をもつ。また式 (56) と併せてこのことは、

$$\delta_{g0} = \delta_{f0}, \quad \delta_g = \delta_f \quad (209)$$

と選ぶ必要がある。このことと式 (205) 右辺第 1 項が  $s = j\omega_0$  に 1 位の零点をもつことから、

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{gi} - \delta_{fi}}{-\omega_0^2 + \gamma_i} = 0 \quad (210)$$

が必要条件になる。

ところで、 $g(=g_e + sg_o)$  を決めても  $f_o, h_e'$  は決まるわけではなく、また  $f_o, h_e'$  の一方を任意に決められると言うわけでもない。通常は  $g$  や  $f$  に対して、Feldkeller の公式により  $h$  は因数の組み合わせ方によりかなり多数の選び方が出来るが、今の場合、 $h = h_e$  は偶多項式であるから、この組み合わせによる不定さはない。

$g$  に対して  $f_o$  を適当に選ぶことにより、式 (205) から  $h_e'$  が ( $\pm 1$  の不定性は別として) 一意的に定まる。式 (205) は、

$$\left(1 - \frac{h_e'}{g_e'}\right) \cdot \left(1 + \frac{h_e'}{g_e'}\right) = \frac{s(g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \cdot \frac{s(g_o + f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (211)$$

と書けるので、

$$1 - \frac{h_e'}{g_e'} = \frac{s(g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (212)$$

$$1 + \frac{h_e'}{g_e'} = \frac{s(g_o + f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (213)$$

とするのが自然であるようにも見えるが、これは明らかに不可である。なぜならば、式 (213) で左辺は  $s = j\omega_0$  に極をもたないが、右辺は  $s = j\omega_0$  に極をもつからである。さらに、式 (212)、(213) の右辺は奇関数であるが、左辺は偶関数である。なお、 $g_o + f_o$  が  $s = j\omega_0$  に零点を持つようにすると、式 (56) と矛盾する結果となり、ダメである。

式 (212)、(213) のような分解を考えるとすると、次のようなことが考えられる。

$$1 - \frac{h_e'}{g_e'} = k \cdot \frac{s^2 + c}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{s^2(g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (214)$$

$$1 + \frac{h_e'}{g_e'} = \frac{1}{k} \cdot \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + c} \cdot \frac{g_o + f_o}{(s^2 + \omega_0^2)g_e'} \quad (215)$$

式 (214), (215) の分解の方針は次の通り。

- 1)  $g_o - f_o$  は  $s = j\omega_0$  に 2 位の零点を持つので、これをうち消すように式 (214) の分母に  $s^2 + \omega_0^2$  をかける。
- 2) 式 (50) により  $g_o - f_o$  は  $2n - 2$  次となるので、因数  $s^2$  は式 (214) の方に全部入れる ( $s$  を分けて入れるのは奇関数、偶関数の関係で不可)。
- 3) 式 (214)(215) の因数  $s^2 + c$  は、次数が  $2n$  (分母子とも) となるように入れた。 $c$  は今から決める定数。
- 4) 式 (214)(215) の  $k$  は今から決める定数。
- 5) 式 (215) で二つの因数の  $s^2 + \omega_0^2$  はキャンセルする。
- 6) 式 (215) で因数  $s^2 + c$  は  $g_o + f_o$  の因数とキャンセルするように定める。すなわち、

$$g_o + f_o = 0|_{s^2 = -c} = 0 \quad (216)$$

以下では式 (214)(215) とすることの可否、及び上記 1)~6) と出来るか否かについて調べる。 $g'_e, h'_e$  は同次の偶多項式であるから

$$\frac{h'_e}{g'_e} = \delta_h + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{hi}}{s^2 + \gamma_i} \quad (\delta_h \neq 0) \quad (217)$$

と書ける。式 (214)、(206)、(207)、(209) より

$$\frac{s^2 + c}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{s^2(g_o - f_o)}{(s^2 + \omega_0^2)g'_e} = \frac{s^2 + c}{s^2 + \omega_0^2} \sum_{i=1}^4 \frac{(\delta_{gi} - \delta_{fi})s^2}{s^2 + \gamma_i} (\equiv F(s) \text{ とおく}) \quad (218)$$

このとき

$$F(\infty) = \sum_{i=1}^4 (\delta_{gi} - \delta_{fi}) \quad (219)$$

であり、式 (210) が成立しているとしているので、

$$F(s) = F(\infty) + \sum_{i=1}^4 \frac{\eta_i}{s^2 + \gamma_i} \quad (220)$$

と書ける。ここで、

$$\eta_i \equiv \lim_{s \rightarrow j\sqrt{\gamma_i}} (s^2 + \gamma_i) F(s) \quad (221)$$

$$= \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} (\delta_{gi} - \delta_{fi}) (-\gamma_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (222)$$

一方、式 (215)(206)(207)(210) により、

$$\frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + c} \cdot \frac{g_o + f_o}{(s^2 + \omega_0^2)g'_e} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + c} \left[ 2\delta_g + \frac{2\delta_{g0}}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{gi} + \delta_{fi}}{s^2 + \gamma_i} \right] (\equiv G(s) \text{ とおく}) \quad (223)$$

したがって、

$$G(\infty) = 2\delta_g \quad (224)$$

また  $s^2 + c$  の因数が  $G(s)$  の分母に入らないためには

$$2\delta_g + \frac{2\delta_{g0}}{\omega_0^2 - c} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{gi} + \delta_{fi}}{\gamma_i - c} = 0 \quad (225)$$

が成り立つことが必要。またこれらの条件の下で

$$G(s) = G(\infty) + \sum_{i=1}^4 \frac{\xi_i}{s^2 + \gamma_i} \quad (226)$$

と書ける。ここで

$$\xi_i \equiv \lim_{s \rightarrow j\sqrt{\gamma_i}} (s^2 + \gamma_i) G(s) \quad (227)$$

$$= \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} (\delta_{gi} + \delta_{fi}) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (228)$$

となる。式 (214)(215) の両式を加えると左辺は 2 となるので、

$$2 = \sum_{i=1}^4 \frac{k\eta_i}{s^2 + \gamma_i} + \sum_{i=1}^4 \frac{\frac{1}{k}\xi_i}{s^2 + \gamma_i} + kF(\infty) + \frac{1}{k}G(\infty) \quad (229)$$

これが恒等的に成立することから

$$k\eta_i + \frac{1}{k}\xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (230)$$

$$kF(\infty) + \frac{1}{k}G(\infty) = 2 \quad (231)$$

式 (230), (231) に (218), (222), (224), (228) を代入すると

$$k \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} (\delta_{gi} - \delta_{fi})(-\gamma_i) + \frac{1}{k} \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} (\delta_{gi} + \delta_{fi}) = 0 \quad (232)$$

$$k \sum_{i=1}^4 (\delta_{gi} - \delta_{fi}) + \frac{1}{k} 2\delta_g = 2 \quad (233)$$

式 (232) は、

$$k^2 \left( \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} \right)^2 \gamma_i (\delta_{gi} - \delta_{fi}) = \delta_{gi} + \delta_{fi} \quad (234)$$

となる。これから

$$\delta_{gi} > |\delta_{fi}| \quad (235)$$

と選ぶ必要があることが分かる。なぜなら、式 (232) が成り立つとして、もしも

$$\delta_{gi} - \delta_{fi} \leq 0, \quad \delta_{gi} + \delta_{fi} \leq 0 \quad (236)$$

とすると、これらの 2 式の和から、 $\delta_{gi} \leq 0$  となり、これは式 (208) に反するからである。  
いま

$$a_i \equiv \delta_{gi} - \delta_{fi}, \quad b_i \equiv \delta_{gi} + \delta_{fi} \quad (237)$$

とおくと、式 (234) は

$$k^2 \left( \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} \right)^2 \gamma_i a_i = b_i \quad (238)$$

したがって、

$$\delta_{gi} = \frac{1}{2}(a_i + b_i) = \frac{1}{2} \left( 1 + k^2 \left[ \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} \right]^2 \gamma_i \right) a_i \quad (239)$$

このことは、 $\delta_{gi} > 0$  とすることは、式 (234) のもとで、

$$a_i > 0 \quad \text{or} \quad b_i > 0 \quad (240)$$

と選べばよいことになる。

なお、式 (215) から式 (214) を引くことにより、

$$2 \frac{h'_e}{g'_e} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^4 \frac{\xi_i}{s^2 + \gamma_i} - k \sum_{i=1}^4 \frac{\eta_i}{s^2 + \gamma_i} + \frac{1}{k} \cdot 2\delta_g \quad (241)$$

これと、式 (217) より

$$\frac{1}{k} \cdot \delta_g = \delta_h \quad (242)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} \xi_i - k\eta_i \right) = \delta_{hi} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (243)$$

となり、 $g'_e, g_o, f_o$  から  $h'_e$  が一意的に求まることになる。

式 (243) に式 (222)(228) を代入すると、

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k} \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} (\delta_{gi} + \delta_{fi}) - k \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} (\delta_{gi} - \delta_{fi})(-\gamma_i) \right] = \delta_{hi} \quad (244)$$

すなわち、

$$\frac{1}{2k} \left( \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} \right) \left[ (\delta_{gi} + \delta_{fi}) + k^2 \left( \frac{c - \gamma_i}{\omega_0^2 - \gamma_i} \right)^2 (\delta_{gi} - \delta_{fi})(\gamma_i) \right] = \delta_{hi} \quad (245)$$

式 (245) の [ ] 中の第 2 項は式 (234) により  $\delta_{gi} + \delta_{fi}$  であるから、式 (245) は

$$\frac{1}{k} \left( \frac{\omega_0^2 - \gamma_i}{c - \gamma_i} \right) (\delta_{gi} + \delta_{fi}) = \delta_{hi} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (246)$$

したがって、式 (246), (242) により、 $\delta_h, \delta_{hi}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) は、 $\delta_g, \delta_{gi} + \delta_{fi}$  で簡潔に表されることになる。

# SIMULTANEOUS REALIZATION OF $Z_{21}/Z_{11}$ AND $Y_{21}$ OF AN RC TWO-PORT

Tetsuo NISHI and Masato OGATA

Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University,  
Fukuoka, 812-8581 JAPAN

## ABSTRACT

In this paper we give the necessary and sufficient conditions for the prescribed functions  $z_{21}/z_{11}$  and  $y_{21}$  to be realizable simultaneously as an RC two-port.

## 1. INTRODUCTION

In the process of modeling RC distributed lines, we encountered the realization of an RC two-port having the prescribed two rational functions  $z_{21}/z_{11}$  and  $y_{21}$ . This problem comes from approximating a distributed RC line so that the open-circuited output voltage and short-circuited output current of the line may be close to those of a lumped RC two-port. Solving the above problem by using the method described in this paper, we obtained very good approximation to estimate the delay time for the step response. The details will be shown in a companion paper submitted to this ISCAS[14].

Network synthesis problems like the above have been discussed extensively in sixties and early seventies[1]-[13]. As far as the authors know, however, the above problem was not published. As related synthesis problems, we know 1) the simultaneous realization of  $z_{11}$  and  $y_{11}$  of reactance two-ports, 2) the simultaneous realization of  $z_{11}$  and  $z_{12}$  of RC two-ports, etc.

In this paper we give the necessary and sufficient conditions for the prescribed rational functions  $z_{21}/z_{11}$  and  $y_{21}$  to be realizable simultaneously a lumped RC two-port.

## 2. PRELIMINARIES

Let  $Z = [z_{ij}]$  (resp.  $Y = [y_{ij}]$ ) be an impedance (resp. admittance) matrix of an RC two-port:

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (z_{12} = z_{21}) \quad (1)$$

This research was partly supported by the 21st Century COE Program "Reconstruction of Social Infrastructure Related to Information Science and Electrical Engineering" and by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C)(2) (No. 13650414) of the Ministry of Education, Culture, and Science in Japan.

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned} \quad (y_{12} = y_{21}) \quad (2)$$

The open-circuited output voltage  $V_2$  and the short-circuited output current  $I_2$  for the step input voltage  $V_1 = E/s$  are given as follows:

$$V_2|_{I_2=0} = \frac{z_{21}}{z_{11}} \frac{E}{s}, \quad I_2|_{V_2=0} = y_{21} \frac{E}{s} \quad (3)$$

We expect that if two circuits have similar characteristics for both the open-circuited termination and the short-circuited termination, then they also have similar behaviors for arbitrary load impedances. This is the motivation for the simultaneous realization of these two functions[14].

Suppose that  $z_{21}/z_{11}$  and  $y_{21}$  are given in irreducible rational functions as follows:

$$\frac{z_{21}}{z_{11}} = \frac{G}{F}, \quad y_{21} = -\frac{Q}{P} \quad (4)$$

where  $F$ ,  $G$ ,  $P$  and  $Q$  are real polynomials in  $s$  and  $F$  and  $G$  (resp.  $P$  and  $Q$ ) are prime each other.

Let  $D$  be the least common denominator of  $z_{ij}$ . Then we can write:

$$z_{11} = \frac{N_{11}}{D}, \quad z_{21} = z_{12} = \frac{N_{21}}{D}, \quad z_{22} = \frac{N_{22}}{D} \quad (5)$$

Since

$$y_{21} = \frac{-z_{21}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \quad (6)$$

holds,  $z_{22}$  can be represented as

$$z_{22} = \frac{z_{21}}{z_{11}} \left( z_{12} - \frac{1}{y_{21}} \right) \quad (7)$$

Let

$$y_{21} = -\frac{\tilde{N}_{21}}{\tilde{D}} \quad (8)$$

Substituting Eq.(8) into Eq.(7), we have:

$$\begin{aligned} z_{22} &= \frac{N_{21}}{N_{11}} \left( \frac{N_{21}}{D} + \frac{\tilde{D}}{\tilde{N}_{21}} \right) \\ &= \frac{N_{21}}{N_{11}} \cdot \frac{N_{21}\tilde{N}_{21} + D\tilde{D}}{D\tilde{N}_{21}} \end{aligned} \quad (9)$$

### 3. REALIZABILITY CONDITIONS OF $Z_{21}/Z_{11}$ AND $Y_{21}$

#### 3.1. Determination of $D(s)$

Due to the well-known properties of an RC impedance function, we see that

$$\deg N_{21} \leq \deg N_{11} \quad (10)$$

This is equivalent to

$$\deg G \leq \deg F \quad (11)$$

which is one of the necessary conditions for the realization of  $z_{21}/z_{11}$ . First we consider the simplest but the most fundamental case:

**Assumption 1:**

$$N_{21} = \tilde{N}_{21} \quad (12)$$

The case where Assumption 1 does not hold will be discussed in Sec. 4. Assumption 1 corresponds to the case where all poles of  $Z$  and  $Y$  are compact.<sup>1</sup>

In this section we can assume that

$$N_{11} = F, \quad N_{21} = G, \quad \tilde{D} = P, \quad \tilde{N}_{21} = Q \quad (13)$$

$$G = Q \quad (14)$$

From Assumption 1 and Eq.(9) we have

$$z_{22} = \frac{N_{21}^2 + D\tilde{D}}{N_{11}D} \quad (15)$$

Since zeros of both  $N_{11}$  and  $\tilde{D}$  are simple and lie only on the negative real axis, we can write  $N_{11}$  and  $\tilde{D}$  without loss of generality as:

$$\begin{aligned} N_{11} &= A_{11}(s + \mu_1)(s + \mu_2) \cdots (s + \mu_n) \\ A_{11} &> 0, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= (s + \tilde{\sigma}_1)(s + \tilde{\sigma}_2) \cdots (s + \tilde{\sigma}_m) \\ 0 &< \tilde{\sigma}_1 < \tilde{\sigma}_2 < \cdots < \tilde{\sigma}_m \end{aligned} \quad (17)$$

Since the numerator of Eq.(15) should be exactly divisible by  $N_{11}$ , it has to vanish at  $s = -\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). That is,

$$N_{21}^2(-\mu_i) + D(-\mu_i)\tilde{D}(-\mu_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

<sup>1</sup>Let  $K = [k_{ij}]$  be a residue matrix of a pole. If  $k_{12} \neq 0$  and if  $|K| = 0$ , then the pole is said to be compact.

Thus the polynomial  $D(s)$  has to be determined so as to satisfy Eq.(18). Since  $\deg D$  is equal to  $\deg N_{11}$  or  $\deg N_{11} + 1$ , we can write  $D$  as

$$\begin{aligned} D(s) &\equiv (s + \sigma_1)(s + \sigma_2) \cdots (s + \sigma_l) \\ 0 &\leq \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_l \\ l &= n \text{ or } l = n + 1 \end{aligned} \quad (19)$$

Eq.(18) consists of  $n$  equations and contains  $l$  ( $= n$  or  $n + 1$ ) unknown  $\sigma_i$ .

Considering Eq.(19), we set  $\sigma_1 = 0$  and  $l = n + 1$ . Then

$$\begin{aligned} D(s) &= sD_0(s) \\ D_0(s) &= (s + \sigma_2) \cdots (s + \sigma_{n+1}) \end{aligned} \quad (20)$$

Thus we can obtain  $D_0(s)$  from  $N_{21}$ ,  $\tilde{D}(s)$ , and  $N_{11}$  by using Eq.(18).

#### 3.2. Derivation of realizability conditions

Since

$$z_{11} = \frac{N_{11}}{D} = \frac{A_{11}(s + \mu_1)(s + \mu_2) \cdots (s + \mu_n)}{(s + \sigma_1)(s + \sigma_2) \cdots (s + \sigma_{n+1})} \quad (21)$$

is an RC impedance function, the following inequality must be satisfied:

$$0 = \sigma_1 < \mu_1 < \sigma_2 < \mu_2 < \cdots < \sigma_n < \mu_n < \sigma_{n+1} < \infty \quad (22)$$

In order for Eq.(22) to hold, the following inequalities should be satisfied:

$$\begin{aligned} D(-\mu_1) &< 0, \quad D(-\mu_2) > 0 \\ D(-\mu_3) &< 0, \quad D(-\mu_4) > 0 \\ &\vdots \\ D(-\mu_{2k-1}) &< 0, \quad D(-\mu_{2k}) > 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (23)$$

We therefore see from Eqs.(18) and (23) that

$$\begin{aligned} \tilde{D}(-\mu_1) &> 0, \quad \tilde{D}(-\mu_2) < 0 \\ \tilde{D}(-\mu_3) &> 0, \quad \tilde{D}(-\mu_4) < 0 \\ &\vdots \\ \tilde{D}(-\mu_{2k-1}) &> 0, \quad \tilde{D}(-\mu_{2k}) < 0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (24)$$

That is,  $\tilde{D}(s)$  has a zero between  $s = -\mu_i$  and  $s = -\mu_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). From this fact and from Eq.(24) we see by noting  $\tilde{D}(0) > 0$  that

$$0 < \mu_1 < \tilde{\sigma}_1 < \mu_2 < \tilde{\sigma}_2 < \cdots < \mu_n < \tilde{\sigma}_n < \infty \quad (25)$$

holds and therefore that

$$m = n \text{ or } m = n - 1 \quad (26)$$

In other words,

**Lemma 1:** The condition that  $\frac{\tilde{D}}{N_{11}}$  is an RC impedance function is necessary for the prescribed functions to be realizable independently of  $m = n$  or  $m = n - 1$ .

### 3.3. Proof for the realizability

Suppose that the conditions in Lemma 1 is satisfied. Then we have to show that for the polynomial  $D(s)$  determined above the impedance matrix  $Z = [z_{ij}] = [N_{ij}/D]$  is a (passive) RC impedance matrix. To do so we investigate the residue condition.

(i) Residue at  $s = 0$

The residues  $k_{ij}$  of  $z_{ij}$  at  $s = 0$  can be calculated as follows:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \left. \frac{N_{11}(s)}{D_0(s)} \right|_{s=0} > 0 \\ k_{12} &= k_{21} = \left. \frac{N_{21}(s)}{D_0(s)} \right|_{s=0} \\ k_{22} &= \left. \frac{N_{22}(s)}{D_0(s)} \right|_{s=0} = \left. \frac{\frac{N_{21}^2 + D\tilde{D}}{N_{11}}}{D_0(s)} \right|_{s=0} \end{aligned} \quad (27)$$

We therefore have

$$\begin{aligned} k_{11}k_{22} - k_{12}^2 &= \frac{1}{(D_0(s))^2} \left[ N_{11} \cdot \frac{N_{21}^2 + sD_0\tilde{D}}{N_{11}} - N_{21}^2 \right]_{s=0} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Thus the pole at  $s = 0$  is compact.

(ii) Residue at  $s = -\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{aligned} k_{11} &= \left. \frac{N_{11}(s)}{sD'_0(s)} \right|_{s=-\sigma_i} > 0 \\ k_{12} &= k_{21} = \left. \frac{N_{21}(s)}{sD'_0(s)} \right|_{s=-\sigma_i} \\ k_{22} &= \left. \frac{N_{22}(s)}{sD'_0(s)} \right|_{s=-\sigma_i} = \left. \frac{\frac{N_{21}^2(s) + sD_0(s)\tilde{D}}{N_{11}}}{sD'_0(s)} \right|_{s=-\sigma_i} \\ &= \left. \frac{\frac{N_{21}^2(s)}{N_{11}}}{sD'_0(s)} \right|_{s=-\sigma_i} \end{aligned} \quad (29)$$

Even in this case we have

$$k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0 \quad (30)$$

It therefore follows that all poles are compact. The inequalities  $k_{11} > 0$  in Cases (i) and (ii) follows from

the property of  $N_{11}/D$ . (Note that Eq.(24) conversely implies Eq.(23)). Thus we have:

**Theorem 1:** On Assumption 1 if Eq.(11) holds and if  $\tilde{D}/N_{11} (= P/G)$  is an RC impedance function, then the prescribed two functions,  $z_{21}/z_{11}$  and  $y_{21}$ , are realizable as a passive RC two-port.

### 4. CASE WHERE ASSUMPTION 1 DOES NOT HOLD

This case corresponds to the case where some poles are not compact. This implies that there may exist some common factors among  $D$ ,  $N_{ij}$ ,  $\tilde{D}$ , and  $\tilde{N}_{21}$ .

Let  $\Gamma(s)$  be the least common multiple factor of  $G$  and  $Q$ , i.e.,

$$\Gamma = G\alpha = Q\beta \quad (31)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are polynomials having the highest coefficient of unity and being prime each other. Note that  $\alpha$  and  $\beta$  can be determined uniquely and one of them may possibly be a constant.

Then we can write

$$\frac{z_{21}}{z_{11}} = \frac{G\alpha}{F\alpha} = \frac{\Gamma}{F\alpha}, \quad y_{21} = \frac{Q\beta}{P\beta} = \frac{\Gamma}{P\beta} \quad (32)$$

Then by letting

$$\hat{F} = \alpha F, \quad \hat{G} = \alpha G (= \Gamma), \quad \hat{P} = \beta P, \quad \hat{Q} = \beta Q (= \Gamma) \quad (33)$$

we can follow the previous discussion in Sec. 3 without any difficulty by replacing  $F$ ,  $G$ ,  $P$  and  $Q$  with  $\hat{F}$ ,  $\hat{G}$ ,  $\hat{P}$  and  $\hat{Q}$  respectively. We therefore conclude

**Theorem 2:** If  $\deg \alpha G \leq \deg \beta Q$  and if  $P\beta/F\alpha$  is an RC impedance function, then we can realize  $z_{21}/z_{11}$  and  $y_{21}$ .

### 5. EXAMPLES

**Example 1:** Let

$$\frac{z_{21}}{z_{11}} = \frac{s-1}{s+1} = \frac{G}{F}, \quad y_{21} = -\frac{s-1}{s+2} = \frac{Q}{P} \quad (34)$$

Referring to the results in Sec.3, let  $N_{21} = s - 1$ ,  $N_{11} = s + 1$ , and  $\tilde{D} = s + 2$ . Then the function:

$$\frac{\tilde{D}}{N_{11}} = \frac{s+2}{s+1} \quad (35)$$

is apparently an RC impedance function. Let

$$D(s) \equiv s(s + \sigma_2) \quad (36)$$

Since  $\mu_1 = 1$ , Eq.(18) becomes

$$(-1-1)^2 + (-1)(-1+\sigma_2)(-1+2) = 0 \quad (37)$$

from which we have:

$$\sigma_2 = \frac{4}{1} + 1 = 5 \quad (38)$$

From Eqs.(38) and (15) we have:

$$\begin{aligned} N_{22}(s) &= \frac{N_{21}^2(s) + D(s)\tilde{D}(s)}{N_{11}(s)} \\ &= \frac{(s-1)^2 + s(s+5)(s+2)}{s+1} \\ &= s^2 + 7s + 1 \end{aligned} \quad (39)$$

We therefore have:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{s+1}{s(s+5)}, \quad z_{22} = \frac{s^2 + 7s + 1}{s(s+5)} \\ z_{12} &= z_{21} = \frac{s-1}{s(s+5)} \end{aligned} \quad (40)$$

The partial fraction expansion of  $Z$  is given as:

$$Z = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + \frac{1}{s+5} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

from which we see that Eq.(41) is indeed a passive RC impedance matrix.

**Example 2:** Let

$$\frac{z_{21}}{z_{11}} = \frac{s^2 + 1}{(s+1)(s+3)}, \quad y_{21} = -\frac{s^2 + 1}{(s+2)(s+5)} \quad (42)$$

Let  $N_{21} = s^2 + 1$ ,  $N_{11} = (s+1)(s+3)$ , and  $\tilde{D} = (s+2)(s+5)$ . Then the function:

$$\frac{\tilde{D}}{N_{11}} = \frac{(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)} \quad (43)$$

is apparently an RC impedance function. Let

$$D(s) \equiv s(s^2 + as + b) \quad (44)$$

where  $a$  and  $b$  are to be determined. Since  $\mu_1 = 1$  and  $\mu_2 = 3$ , Eq.(18) becomes as follows:

$$\begin{aligned} (1^2 + 1)^2 + (-1)[(-1)^2 + a(-1) + b][(-1+2)(-1+5)] &= 0 \\ (3^2 + 1)^2 + (-3)[(-3)^2 + a(-3) + b][(-3+2)(-3+5)] &= 0 \end{aligned}$$

from which we have:

$$5(b-a+1) = 4, \quad -2(b-3a+9) = 100 \quad (45)$$

From Eq.(45) we have:

$$a = 127/5, \quad b = 126/5$$

We therefore have:

$$D(s) = s(s^2 + \frac{127}{5}s + \frac{126}{5}) \quad (46)$$

Then  $N_{22}$  can be determined from Eq.(15) as

$$N_{22} = s^3 + \frac{142}{5}s^2 + \frac{1}{3}(256 - \frac{4}{3})s + \frac{1}{3} \quad (47)$$

Thus we obtained  $z_{ij} = N_{ij}/D$  which correspond to an RC impedance matrix.

## 6. CONCLUSIONS

We give the necessary and sufficient condition for the prescribed functions  $z_{21}/z_{11}$  and  $y_{21}$  to be realizable as a passive RC two-port.

## 7. REFERENCES

- [1] V. Belevitch, "Classical Network Theory", Holden-Day, Cambridge, 1968.
- [2] N. Balabanian, "Network synthesis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1958.
- [3] H.J. Carlin and A.B. Giordano, "Network theory", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [4] W. Cauer, "Theorie der linearen Wechselstromschaltungen," Acad. Verlag, Berlin, 1941; English translation, "Synthesis of linear communication networks", McGraw-Hill, New York, 1958.
- [5] E.A. Guillemin, "Synthesis of passive networks," John Wiley & Sons, New York, 1957.
- [6] D. Hazony, "Elements of network synthesis," Reinhold, New York 1963.
- [7] S. Karni, "Network theory: Analysis and synthesis," Allyn and Bacon, 1966
- [8] Y. Oono, "Synthesis of a finite  $2n$ -terminal networks as the extension of Brune's 2-terminal network theory", J. Inst. Elec. Comm. Japan, vol.31, no.9, pp.163-181, Aug. 1948 (in Japanese)
- [9] Y. Oono, "Synthesis of a finite  $2n$ -terminal network by a group of networks each of which contains only one ohmic resistance", J. Math.Phys. vol.29, pp.13-26, April 1950
- [10] Y. Oono and K. Yasuura, "Synthesis of finite passive  $2n$ -terminal networks with prescribed scattering matrices", Mem. Fac. Eng. Kyushu Univ. vol.14, no.2, pp.125-177, May 1954
- [11] M.E. Van Valkenberg, "Introduction to modern network synthesis", Wiley, New York, 1960.
- [12] L. Weinberg, "Network analysis and synthesis," McGraw-Hill, New York, 1962
- [13] D.C. Youla, "A new theory of cascade synthesis", IRE Trans., vol. CT-8, no. 3, pp.244-260, Sept. 1961
- [14] M. Ogata, Y. Okabe, and T. Nishi, "Simple RC models of distributed RC lines in consideration with the delay time", Submitted to ISCAS'04.



# SIMPLE RC MODELS OF DISTRIBUTED RC LINES IN CONSIDERATION WITH THE DELAY TIME

*Masato OGATA, Yoshiaki OKABE, and Tetsuo NISHI*

Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University,  
Fukuoka, 812-8581 JAPAN

## ABSTRACT

Two simple lumped RC circuits are presented to model a single distributed RC line. These circuits give very accurate results for the 50% propagation delay of the RC distributed lines terminated with arbitrary load impedances.

## 1. INTRODUCTION

It has become well accepted that interconnect delay dominates gate delay in today's deep submicrometer technology [1]. So accurate and easy analysis methods for signal propagation are required in order to properly design complex circuits.

The RC trees are still widely used as a typical model for on-chip interconnects and the 50% propagation delay is conventionally used as a delay model in the RC trees for the synthesis of VLSI circuits and the interconnect optimization [2]-[6]. The Elmore delay can be easily calculated, but its accuracy is not necessarily satisfactory.

Typical methods to analyze the interconnect problems are (i) lumped circuit modeling of distributed lines, (ii) the method of characterization, etc.

In the above case (i) the circuit to be analyzed becomes usually very complex when we want to increase the calculation accuracy. In this paper we consider the modeling of a distributed RC line by very simple passive RC two-ports of which impedance parameters are of degree one or two.

The outline of our method is as follows: We first show that the step responses for the open-circuited voltage transfer function, short-circuited transfer admittance function, and the short-circuited current transfer function can be approximated accurately by functions of degree one or two as far as we concern with the delay characteristics. Then we determine passive RC two-ports which possess the above transfer functions.

This research was partly supported by the 21st Century COE Program "Reconstruction of Social Infrastructure Related to Information Science and Electrical Engineering" and by the Grant-in-Aid for Encouragement of Young Scientists (B) (No.14750301) of the Ministry of Education, Culture, and Science in Japan.

We expect that the above approximation is effective even for the lines terminated with a variety of load impedances. Indeed numerical results show that the use of our RC models yields very accurate delay characteristics for arbitrary termination. Similar results can also be obtained for the cascade of distributed lines.

## 2. APPROXIMATION OF DISTRIBUTED RC LINES

### 2.1. Transfer functions of distributed RC lines

Fig.1 illustrates a 2-port consisting of a single distributed RC line with length  $l$ . Given the per-unit-length parameters,  $R$  and  $C$ , of the distributed RC line, the 2-port is represented by the open-circuit impedance matrix :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 \coth \sqrt{sRC}l & Z_0 \operatorname{cosech} \sqrt{sRC}l \\ Z_0 \operatorname{cosech} \sqrt{sRC}l & Z_0 \coth \sqrt{sRC}l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

or the chain matrix :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \sqrt{sRC}l & Z_0 \sinh \sqrt{sRC}l \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \sqrt{sRC}l & \cosh \sqrt{sRC}l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

where  $Z_0$  denotes the characteristic impedance of the distributed RC line and is given as

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R}{sC}}. \quad (3)$$

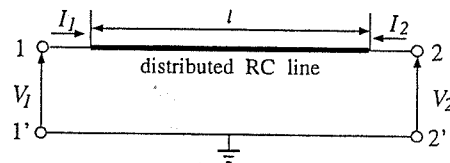


Fig. 1. Single distributed RC line



The open-circuited voltage transfer function, the short-circuited transfer admittance function, and the short-circuited current transfer function are given respectively as follows:

$$H(s) \equiv \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{z_{21}}{z_{11}} = \frac{1}{k_{11}} = \frac{1}{\cosh \sqrt{sRC}l}. \quad (4)$$

$$F(s) \equiv \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} = -\frac{z_{12}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} = -\frac{1}{k_{12}} = -\sqrt{\frac{sC}{R}} \frac{1}{\sinh \sqrt{sRC}l} \quad (5)$$

$$P(s) \equiv \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0} = -\frac{z_{21}}{z_{22}} = -\frac{1}{k_{22}} = \frac{1}{\cosh \sqrt{sRC}l}. \quad (6)$$

## 2.2. Approximation of the voltage transfer function

First we approximate the voltage transfer function  $H(s)$  by an RC two-port, whose response approximates the step response of the original distributed RC line. Applying the unit step function  $V_1 = \frac{1}{s}$  to the 2-port in Fig.1, we have the response as

$$V_2|_{I_2=0} = \frac{1}{s \cosh \sqrt{sRC}l}. \quad (7)$$

The poles of the right-hand side of Eq.(7) are

$$s_0 = 0$$

$$s_n = -\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4RCl^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

From Eq.(8) we have the partial fraction expansion

$$V_2|_{I_2=0} = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{\pi(2n-1)} \frac{1}{s + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4RCl^2}}. \quad (9)$$

We approximate the step response  $V_2|_{I_2=0}$  in Eq. (9) by the sum of the finite number of terms as

$$\tilde{V}_m(s) \equiv \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^m (-1)^n \frac{4}{\pi(2n-1)} \cdot \frac{1}{s + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4RCl^2}} \quad (10)$$

and obtain an approximated transfer function of order  $m$  as

$$\tilde{H}_m(s) \equiv \frac{\tilde{V}_m}{V_1} = 1 + \sum_{n=1}^m (-1)^n \frac{4}{\pi(2n-1)} \cdot \frac{s}{s + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4RCl^2}}. \quad (11)$$

From Eq.(11) the approximated step response in the time domain is

$$\begin{aligned} \tilde{v}_m(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \tilde{H}_m \cdot \frac{1}{s} \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^m (-1)^n \frac{4}{\pi(2n-1)} \cdot e^{-\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4RCl^2}t} \end{aligned} \quad (12)$$

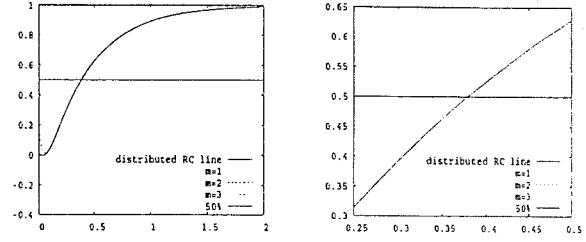


Fig. 2. Unit step response  $\tilde{v}_m$  for the case where  $R = C = l = 1$

Fig.2 shows the unit response (12) for the case where  $R = C = l = 1$ .

The 50% propagation delay  $t_d$  of the transient unit step response  $v_2(t) = \mathcal{L}^{-1} [V_2|_{I_2=0}]$  in Eq. (7) is defined as

$$v_2(t_d) = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

From Eq.(12) we define an approximated value of the 50% delay denoted by  $t_m$  as follows:

$$\tilde{v}_m(t_m) = \frac{1}{2} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

By definition, the approximation of the 50% delay for  $m = 1$  is given as

$$\tilde{v}_1(t_1) = 1 - \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{4RCl^2}t_1} = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Then we get

$$e^{-\frac{\pi^2}{4RCl^2}t_1} = \frac{\pi}{8} \approx 0.3927. \quad (16)$$

By substituting Eq.(16) to the second and third terms of the sum in Eq.(12) we have

$$\begin{aligned} \frac{4}{3\pi} e^{-\frac{\pi^2}{4RCl^2}t_1} &= \frac{4}{3\pi} \left( \frac{\pi}{8} \right)^9 \approx 9.426 \times 10^{-5} \\ \frac{4}{5\pi} e^{-\frac{25\pi^2}{4RCl^2}t_1} &= \frac{4}{5\pi} \left( \frac{\pi}{8} \right)^{25} \approx 1.809 \times 10^{-11} \end{aligned} \quad (17)$$

From Eq.(17) these terms have little influence on calculating the 50% delay  $t_d$ . Hence we obtain

$$t_1 \approx t_d. \quad (18)$$

Thus we see that the 50% delay  $t_d$  can be calculated very accurately by using only the dominant pole  $s_1$  in Eq.(8). Let the first-order approximated transfer function be

$$\tilde{H}(s) \equiv \tilde{H}_1(s) = \frac{-\left(\frac{4}{\pi} - 1\right)s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}}{s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}}. \quad (19)$$

### 2.3. Approximation of transfer admittance function and current transfer function

Given  $V_1 = \frac{1}{s}$ , the transient current of the port 2-2' is given by

$$i_2(t) \equiv \mathcal{L}^{-1} [I_2|_{V_2=0}] = -\frac{1}{Rl} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{(n\pi)^2}{RCl^2} t} \right\} \quad (20)$$

By applying the approximation method in Sec.2.2 to the step response (20), we obtain the first-order approximated transfer function:

$$\tilde{F}(s) \equiv -\frac{1}{Rl} \cdot \frac{-s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}}{s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}} \quad (21)$$

Similarly, the short-circuited current transfer function  $P(s)$  in Eq.(6) is approximated by the following first-order function

$$\tilde{P}(s) \equiv -\frac{(\frac{4}{\pi} - 1)s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}}{s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}} \quad (22)$$

### 3. LUMPED RC CIRCUITS MODELS FOR THE DELAY ESTIMATION

In this section we show two RC two-ports approximating distributed RC lines. One realizes two transfer functions  $\tilde{H}(s)$  in Eq.(19) and  $\tilde{F}(s)$  in Eq.(21) simultaneously (Realization 1), and the other realizes three transfer functions,  $\tilde{H}(s)$ ,  $\tilde{F}(s)$ , and  $\tilde{P}(s)$  in Eq.(22) simultaneously (See Realization 2). The details about the above realizations will be discussed in a companion paper submitted to this ISCAS[7].

#### 3.1. Realization 1

Here we present an RC 2-port  $\tilde{N}$  with an impedance matrix whose elements are given by the functions of degree one. Let  $\tilde{Z} = [\tilde{z}_{ij}]$  be the open-circuit impedance matrix of the RC 2-port  $\tilde{N}$ . Then the elements of the matrix  $\tilde{Z}$  satisfy

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{z}_{21}}{\tilde{z}_{11}} = \frac{-(\frac{4}{\pi} - 1)s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}}{s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}} \quad (23)$$

and

$$-\tilde{F}(s) = \frac{\tilde{z}_{12}}{\tilde{z}_{11}\tilde{z}_{22} - \tilde{z}_{12}\tilde{z}_{21}} = \frac{1}{Rl} \cdot \frac{-s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}}{s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}} \quad (24)$$

Since  $\frac{4}{\pi} - 1 \approx \frac{1}{4}$ , the open-circuit impedance matrix is given as

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} R_0 + \frac{R_0\pi^2}{4RCl^2s} & -R_0(\frac{4}{\pi} - 1) + \frac{R_0\pi^2}{4RCl^2s} \\ -R_0(\frac{4}{\pi} - 1) + \frac{R_0\pi^2}{4RCl^2s} & Rl - (\frac{8}{\pi} - 1)R_0 + \frac{R_0\pi^2}{4RCl^2s} \end{bmatrix} \quad (25)$$

where  $R_0 = \frac{Rl}{\frac{12}{\pi} - 2}$ . Fig.3(a) illustrates the RC 2-port  $\tilde{N}$  realizing  $\tilde{Z}$  in Eq.(25).

#### 3.2. Realization 2

We can realize an RC 2-port  $\hat{N}$  satisfying not only the transfer functions  $\tilde{H}(s)$  and  $\tilde{F}(s)$  but also the transfer function  $\tilde{P}(s)$  in Eq.(22) simultaneously. Let  $\hat{Z} = [\hat{z}_{ij}]$  denote an open-circuit impedance matrix of  $\hat{N}$ . The elements of the matrix  $\hat{Z}$  satisfy

$$\tilde{H} = \tilde{P} = \frac{\hat{z}_{21}}{\hat{z}_{11}} = \frac{\hat{z}_{21}}{\hat{z}_{22}} = \frac{-(\frac{4}{\pi} - 1)s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}}{s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}} \quad (26)$$

and

$$-\tilde{F} = \frac{\hat{z}_{12}}{\hat{z}_{11}\hat{z}_{22} - \hat{z}_{12}\hat{z}_{21}} = \frac{1}{Rl} \cdot \frac{-s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}}{s + \frac{\pi^2}{4RCl^2}} \quad (27)$$

Since  $\frac{4}{\pi} - 1 \approx \frac{1}{4}$ , we obtain the open-circuit impedance matrix  $\hat{Z}$  as:

$$\hat{Z} = \frac{1}{15} Rl \begin{bmatrix} \frac{4(s+\hat{\mu}_1)(s+\hat{\mu})}{s(s+\hat{\sigma})} & \frac{(-s+\hat{\mu}_2)(s+\hat{\mu})}{s(s+\hat{\sigma})} \\ \frac{(-s+\hat{\mu}_2)(s+\hat{\mu})}{s(s+\hat{\sigma})} & \frac{4(s+\hat{\mu}_1)(s+\hat{\mu})}{s(s+\hat{\sigma})} \end{bmatrix} \quad (28)$$

where  $\hat{\sigma} = \frac{2\pi^2}{3RCl^2}$ ,  $\hat{\mu} = \hat{\mu}_2 = \frac{\pi^2}{4RCl^2}$ , and  $\hat{\mu}_1 = \frac{\pi^2}{4RCl^2}$ . Remark that each element of the matrix  $\hat{Z}$  is the function of degree 2. Fig.3(b) shows the RC 2-port  $\hat{N}$  realizing  $\hat{Z}$  in Eq.(28).

### 4. NUMERICAL EXAMPLES

**Example 1:** Consider the unit step response of the single distributed RC line terminated by the load impedance  $Z_L$  (Fig.1). From Eq.(2) we have

$$V_2 = \frac{Z_L}{Z_L \cosh \sqrt{sRC}l + Z_0 \sinh \sqrt{sRC}l} \cdot \frac{1}{s} \quad (29)$$

Fig.4 illustrates the simulation results for the cases where  $R = C = l = 1$  and the load impedances  $Z_L = \frac{100}{s}$  and  $Z_L = \frac{10}{s+1}$ . In Figs.4(a) and (b) we have four curves, i.e., the unit step responses for the distributed RC line, the II-type model, the 2-port of Realization 1, and the 2-port of Realization 2. The curves for our proposed RC circuits are

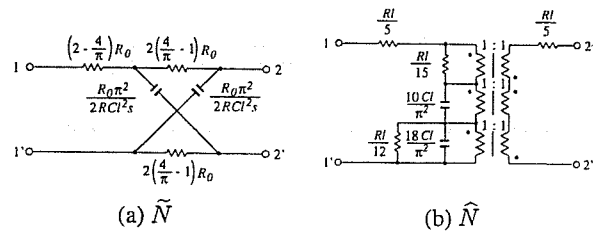


Fig. 3. RC 2-port approximating the single RC line

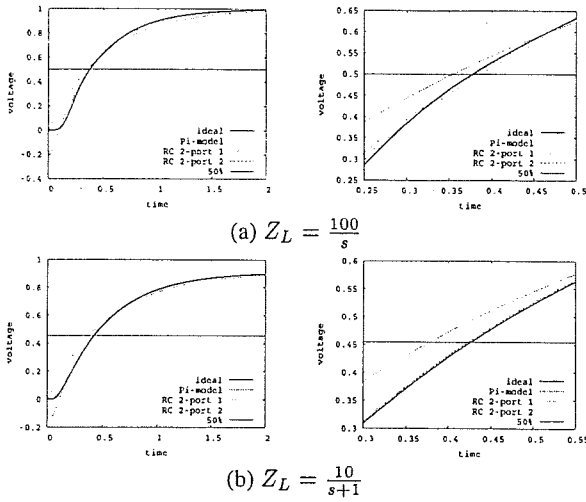


Fig. 4. Unit step responses of the single RC line in Fig. 1

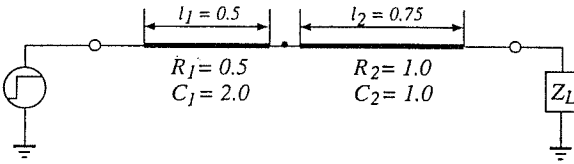


Fig. 5. Circuit for example 2

well coincident with the exact response except near  $t = 0$ . From Fig. 4 we can see that in these cases both proposed circuits give more accurate results for the estimate of the 50% delay than the  $\Pi$ -type model.

**Example 2:** Consider a circuit with two cascaded RC lines in Fig. 5. Fig. 6 shows the unit step responses for the cases where the load impedances  $Z_L = +\infty$  (open) and  $Z_L = \frac{10}{s+1}$ . In Fig. 6(a) and (b) there are four curves, the exact response of the distributed line, the response of  $\Pi$ -type model, the response of Realization 1, and the response of Realization 2. The curves for the distributed line and the Realization 2 are coincident each other and can not be distinguished except near  $t = 0$ . The other curve corresponds to Realization 1 and has 5 % error for the delay time. The reason is that the circuit  $\hat{N}$  (Realization 2) satisfy not only  $\hat{H}(s)$  and  $\hat{F}(s)$  but also  $\hat{P}(s)$ .

## 5. CONCLUSION

In this paper two simple RC circuits are given to model a single distributed RC line (Fig. 3). By using these circuits, we can effectively estimate the 50% propagation delay on

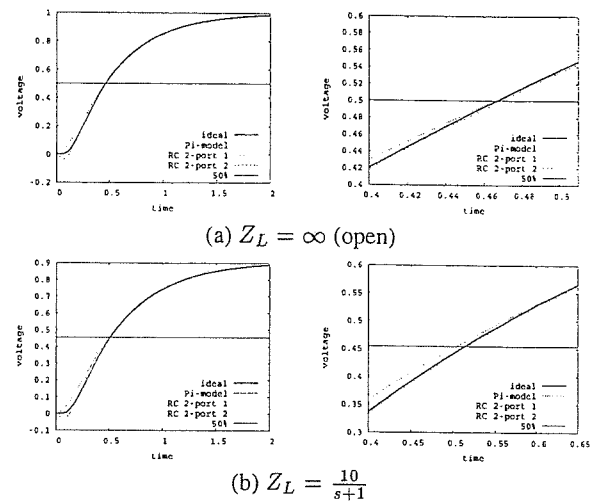


Fig. 6. Unit step response of 2 cascaded RC lines in Fig. 5

the complicated RC trees delay with arbitrary termination.

## 6. REFERENCES

- [1] H.B. Bakoglu, *Circuits, Interconnections, and Packaging for VLSI*, Addison-Wesley Pub.Co., 1990.
- [2] Q. Yu and E.S. Kuh "Moment computation of lumped and distributed coupled RC trees with application to delay and crosstalk estimation", *Proceedings of the IEEE*, vol. 89, no. 5, pp. 772-788, May 2001.
- [3] J. Rubenstein, P. Penfield, Jr., and M. A. Horowitz, "Signal delay in RC tree networks", *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, vol. CAD-2, pp. 202 - 211, July 1983.
- [4] T. Sakurai, "Approximation of wiring delay in MOSFET LSI", *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 18, pp. 418 - 426, Apr. 1983.
- [5] C. Hou, F. Gao, and J. Qian, "Improved delay time estimation of RC ladder networks", *IEEE Trans. Circuit Syst. I*, vol. CAS-47, pp. 242 - 246, February 2000.
- [6] J. M. Zurada and T. Liu, "Equivalent dominant pole approximation of capacitively loaded VLSI interconnection", *IEEE Trans. Circuit Syst.*, vol. CAS-34, pp. 205 - 207, February 1987.
- [7] T. Nishi and M. Ogata, "Simultaneous realization of  $Z_{21}/Z_{11}$  and  $Y_{21}$  of an RC two-port", submitted to *ISCAS* 2004.

## Graph-theoretical approach to 2-switch DC–DC converters

Masato Ogata<sup>\*,†</sup> and Tetsuo Nishi<sup>‡</sup>

*Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University,  
Fukuoka 812-8581, Japan*

### SUMMARY

This paper presents a graph-theoretic approach to analyse and synthesize switch mode DC–DC converters. The result is based on the state-space averaging equation and the fundamental graph theory. Hence our proposed method is applied to various kinds of DC–DC converters with two switches and topological conditions for two-switch DC–DC converters are obtained systematically. Copyright © 2005 John Wiley & Sons, Ltd.

KEY WORDS: topological conditions; graph-theoretical approach; DC–DC converters

### 1. INTRODUCTION

DC–DC converters are widely used as an on-board power supply for personal computers and many other electronic appliances [1, 2]. There are various kinds of DC–DC converters, for example, pulse-width modulator (PWM) type, resonant type, switched-capacitor type, switch mode type, continuous conduction mode (CCM) type, discontinuous conduction mode (DCM) type, and so on. Switch mode DC–DC converters are power conversion circuits which can step up (boost) or step down (buck) the input DC voltage according to the switching duty ratio. These converters usually consist of inductors, capacitors, and a load resistance. One of the most important factors to decide the converter's performance is the topology of these circuits.

Topological approach has been successfully applied to many areas of circuit theory, for example, the active circuit synthesis [4], the equivalent-circuit transformation [5], the analysis of switched-capacitor circuits [6], and the criterion for non-linear resistive circuits to have a unique solution [7, 8], etc. However, there are few attempts on the topological approach to

\*Correspondence to: Masato Ogata, Graduate School of information Science and Electrical Engineering, Kyushu University, Fukuoka 812-8581, Japan.

†E-mail: mogata@csce.kyushu-u.ac.jp

‡E-mail: nishi@csce.kyushu-u.ac.jp

power conversions, though this approach is shown to be useful for analysis and synthesis of converters [9–11].

Many fundamental DC–DC converter topologies have appeared in the literatures [10, 11]. Chen, Maksimović and Erickson showed several configurations of switches which determine a circuit to work as a buck/booster DC–DC converter [11]. These topological conditions for DC–DC converters, however, seem to be obtained rather heuristically or by using some method based on the experimental knowledge, since neither proof for deriving the converter topologies nor a systematic analysis method is given. The main purpose of this paper is to give a unified graph-theoretic interpretation for the averaging equation of a kind of DC–DC converters and to derive the topological conditions for DC–DC converters based on the systematic analysis from graph-theoretic points of view.

The remainder of this paper is organized as follows. In Section 2, the class of circuits to be considered is defined by some assumptions. In Section 3, we show a graph-theoretic interpretation for the average output. The topological conditions for DC–DC converters with two switches are given in Section 4. Section 5 concludes the paper.

## 2. PRELIMINARIES

In this section assumptions and symbols are introduced to make clear the class of circuits we consider in this paper.

We consider a circuit  $N$  consisting of  $m$  inductors,  $L_i (i = 1, \dots, m)$ ,  $n$  capacitors,  $C_i (i = 1, \dots, n)$ , one DC voltage source,  $E$ , one output resistor,  $R_o$ , and two ideal switches,  $S_1$  and  $S_2$ .

### Remark 1

Though transformers are usually used in floating type DC–DC converters, we exclude them in this paper. For the sake of simplicity we also exclude diodes (dependent switches) which are basic elements of DC–DC converters since we replace them with ideal switches (active switches). Therefore a circuit to be considered in this paper is linear and time-varying.

Let  $G$  be a directed graph associated with the circuit  $N$ . The symbol  $L_i$  is used as an inductance as well as an inductor branch. Symbols  $C_i$ ,  $E$ ,  $R_o$ ,  $S_1$  and  $S_2$  are similarly used in this paper. We make the following assumptions (Figure 1).

### Assumption 1

The output resistor  $R_o$  is connected in parallel with  $C_n$  as shown in Figure 2.

### Assumption 2

The circuit  $N$  operates in two phases synchronously as shown in Figure 2. When the switch  $S_1$  is ON, then  $S_2$  is OFF (Phase I), and in the next phase the converse holds (Phase II).

Let  $D$  and  $D'$  be the time durations of Phases I and II, respectively as shown in Figure 2. The duty ratio of each phase is then defined by

$$d \equiv \frac{D}{D_{\text{total}}}, \quad d' \equiv \frac{D'}{D_{\text{total}}} \quad (1)$$

where  $D_{\text{total}} = D + D'$ .

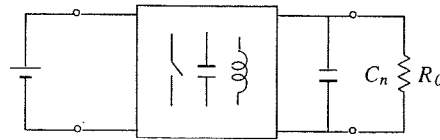


Figure 1. Circuit  $N$ .

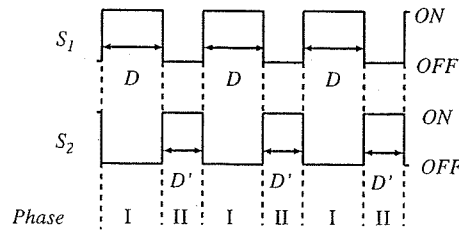


Figure 2. Switching scheme.

*Assumption 3*

The voltages and currents of all elements during the switching time interval  $D_{\text{total}}$  vary slowly.

We have the following topological assumptions in order that the circuit  $N$  operates in the continuous conduction mode.

*Assumption 4*

There exists no loop consisting of  $E$  and  $\{C_i\}$  only.

*Assumption 5*

There exists no cutset consisting of  $\{L_i\}$  only.

*Assumption 6*

There exists no loop consisting of  $E$ ,  $\{C_i\}$ , and  $S_1$ . Also there exists no loop consisting of  $E$ ,  $\{C_i\}$ ,  $S_2$ .

*Assumption 7*

There exists no cutset consisting of  $\{L_i\}$ ,  $R_o$ , and  $S_1$ . Also there exists no cutset consisting of  $\{L_i\}$ ,  $R_o$ , and  $S_2$ .

*Remark 2*

Assumptions 4–7 are the necessary conditions to guarantee that the circuit  $N$  treated in this paper works in continuous conduction mode (CCM) and indeed all practical CCM converters in which diodes are replaced by ideal switches should satisfy these topological assumptions.

The following subgraph is used for describing our discussion.

*Definition 1*

Consider disjoint subsets of branches  $Q_1$  and  $Q_2$  in  $G$ . Then  $G(Q_1; Q_2)$  denotes a subgraph obtained from the original graph  $G$  by short-circuiting  $Q_1$  and open-circuiting  $Q_2$ .

## 3. GRAPH-THEORETIC APPROACH TO SWITCHED MODE DC-DC CONVERTERS

## 3.1. State-space averaging equation

From Assumptions 4–7, we have the following property.

*Property 1*

The branches  $S_1$ ,  $E$ , and  $C(\equiv \{C_i\})$  form a tree of  $G$  and the branches  $S_2$ ,  $E$ , and  $C$  also form a tree of  $G$ . Similarly,  $S_1$ ,  $L(\equiv \{L_i\})$ , and  $R_o$  form a cotree of  $G$ , and  $S_2$ ,  $L$ , and  $R_o$  form a cotree of  $G$ .

From Property 1 the fundamental cutset matrix of  $G$  with respect to the tree  $T$  consisting of  $S_1$ ,  $C$ , and  $E$  is given by

$$C_f(T) = C_f = C \begin{matrix} S_1 & C & E & S_2 & L & R_o \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & C_{II} & C_{Il} & C_{Ir} \\ 0 & 1 & 0 & C_{eII} & C_{cl} & C_{cr} \\ 0 & 0 & 1 & C_{eII} & C_{el} & C_{er} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2)$$

The fundamental cutset matrix,  $C_f(T')$  with respect to the tree  $T'$  consisting of  $S_2$ ,  $C$  and  $E$  can be derived from  $C_f(T)$  in Equation (2) by the well-known pivot-transformation [7]:

Multiplying the first row of  $C_f$  by  $C_{III}^{-1}$  (note that  $|C_{III}| = \pm 1$  by Property 1) and then adding the first row multiplied by  $-C_{eII}$  to the second row and adding the first row multiplied by  $-C_{eII}$  to the third row, we have  $C_f(T')$  as follows:

$$C_f(T') = C'_f = C \begin{matrix} S_1 & C & E & S_2 & L & R_o \\ \begin{bmatrix} C'_{III} & 0 & 0 & 1 & C'_{Il} & C'_{Ir} \\ C'_{cl} & 1 & 0 & 0 & C'_{cl} & C'_{cr} \\ C'_{el} & 0 & 1 & 0 & C'_{el} & C'_{er} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} C'_{III} &\equiv C_{III}^{-1}, & C'_{cl} &\equiv -C_{eII} C_{III}^{-1}, & C'_{el} &\equiv -C_{eII} C_{III}^{-1} \\ C'_{Il} &\equiv C_{III}^{-1} C_{Il}, & C'_{cl} &\equiv C_{cl} - C_{eII} C_{III}^{-1} C_{Il}, & C'_{el} &\equiv C_{el} - C_{eII} C_{III}^{-1} C_{Il} \\ C'_{Ir} &\equiv C_{III}^{-1} C_{Ir}, & C'_{cr} &\equiv C_{cr} - C_{eII} C_{III}^{-1} C_{Ir}, & C'_{er} &\equiv C_{er} - C_{eII} C_{III}^{-1} C_{Ir}. \end{aligned} \quad (4)$$

We easily see from Assumption 1 that

$$\begin{aligned} C_{cr} = C'_{cr} &= \overbrace{[0, 0, \dots, 0]^{n-1} [1]}^1{}^T \\ C_{Ir} = C'_{Ir} &= 0, \quad C_{er} = C'_{er} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

In Assumption 3 we can utilize the state-space averaging analysis and obtain the averaging equation as follows [1, 2]:

$$K \frac{dx}{dt} = \bar{A}x + \bar{b} \quad (6)$$



where

$$K = L + C = \text{diag}[L_1, \dots, L_m, C_1, \dots, C_n] \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= d \begin{bmatrix} 0 & C_{cl}^T \\ -C_{cl} & -\frac{1}{R_o} C_{cr} C_{cr}^T \end{bmatrix} + d' \begin{bmatrix} 0 & C_{cl}'^T \\ -C_{cl}' & -\frac{1}{R_o} C_{cr}' C_{cr}'^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & dC_{cl}^T + d'C_{cl}'^T \\ -dC_{cl} - d'C_{cl}' & -\frac{1}{R_o} (dC_{cr} C_{cr}^T + d'C_{cr}' C_{cr}'^T) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

and

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} dC_{el}^T + d'C_{el}'^T \\ 0 \end{bmatrix} E \left( \equiv \begin{bmatrix} b_e \\ 0 \end{bmatrix} E \right) \quad (9)$$

From Equation (5) we have

$$C_{cr} C_{cr}^T = C_{cr}' C_{cr}'^T = \text{diag}[0, \dots, 0, 1] \quad (10)$$

Then setting  $a = -1/R_o$  and substituting Equation (10) into Equation (8) give

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & & -H & \\ \hline & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ H^T & & & & \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & 0 & \dots & 0 & a \end{array} \right] \quad (11)$$

where  $H = -(dC_{cl}^T + d'C_{cl}'^T)$ .

### 3.2. Average output voltage

Let  $x_s$  be a constant steady state vector of the averaging Equation (6). By substituting  $dx_s/dt = 0$  into Equation (6),  $x_s$  is determined by the set of linear simultaneous equations

$$\bar{A}x_s + \bar{b} = 0 \quad (12)$$

Because DC-DC converters have a unique average output, it is necessary to show the condition that the set of linear equations (12) has a unique solution for  $0 < d < 1$ . The discussion about the solvability of the set of linear equations yields the following lemma.

*Lemma 1 (Nishi et al. [3])*

The set of linear equations (12) has a (non-zero) unique solution for  $0 < d < 1$  only if  $m = n$  holds, that is, the number of inductors is equal to that of capacitors.  $\square$

We omit to the proof of Lemma 1 since it is written in the previous paper [3] in detail.

By noting  $m=n$  and using the Cramer's rule the average output voltage  $v_{\text{out}}$ , i.e., the last element of  $x_s$  of Equation (12) is written as

$$v_{\text{out}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -H_n \\ H^T & 0 \end{vmatrix} E}{|\bar{A}|} = \frac{|-H_n|}{|-H|} E \quad (13)$$

where  $H_n$  is the matrix obtained from  $H$  by replacing the  $n$ -th column of  $H$  with  $-b_e$ . Substitution of Equation (4) into  $-H$  and  $-H_n$  leads to the following formula for the average output of the circuit  $N$ .

*Lemma 2*

The average output voltage of the circuit  $N$  can be written as

$$v_{\text{out}} = \frac{d|C_{cl}^*| + d'|C_{cl}'^*|}{d|C_{cl}| + d'|C_{cl}'|} E \quad (14)$$

where  $C_{cl}^*$  (resp.  $C_{cl}'^*$ ) is the fundamental cutset matrix of  $G(S_1, C_n; S_2, R_o)$  (resp.  $G(S_2, C_n; S_1, R_o)$ ) with respect to the tree consisting of  $E$  and  $C$  except the branch  $C_n$ .  $\square$

The proof of Lemma 2 is given in the appendix.

#### 4. TOPOLOGICAL CONDITIONS FOR TWO-SWITCH CONVERTERS

##### 4.1. Classification of converters

It is apparent that the circuit  $N$  with two switches in Figure 2 works as a booster converter, a buck converter, a buck/booster converter depending on the values of the coefficients of  $d$  and  $d'$  in Equation (14). In other words, it depends on the values of  $|C_{cl}|$ ,  $|C_{cl}'|$ ,  $|C_{cl}^*|$ , and  $|C_{cl}'^*|$  whose values are 0 or  $\pm 1$ . Then we have Table I for identifying the DC-DC converters' types.

##### 4.2. Topological condition for buck-booster converters with two switches

The following well-known lemma of the graph theory plays an important role to evaluate the values of coefficients of  $d$  and  $d'$  in Equation (14).

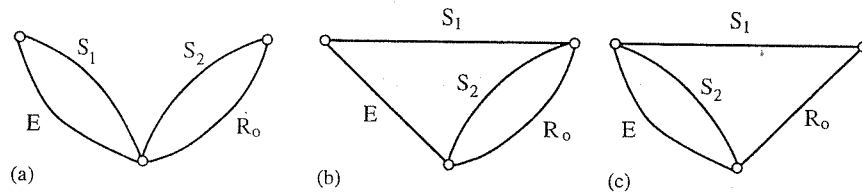
*Lemma 3 (Nishi and Chua [7], Iri [13])*

Let  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ , and  $Q_4$  be a partition of all branches of  $G$  such that  $Q_1$  and  $Q_2$  form a tree of  $G$ . The fundamental cutset matrix of  $G$  with respect to the tree  $T$  consisting of  $Q_1$  and  $Q_2$  can be written as

$$C_f = \begin{matrix} & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & C_{13} & C_{14} \\ 0 & 1 & C_{23} & C_{24} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Table I. Classification of converters with two switches.

	Only one of $ C_{cl}  = 0$ and $ C'_{cl}  = 0$
Booster	holds and $ C_{cl}^*  \cdot  C'_{cl}  = 1$
	Only one of $ C_{cl}^*  = 0$ and $ C'_{cl}  = 0$
Buck	holds and $ C_{cl}  \cdot  C'_{cl}  = 1$
	$\left. \begin{array}{l}  C_{cl}  = 0,  C'_{cl}  \neq 0, \\  C_{cl}^*  \neq 0,  C'_{cl}  = 0 \end{array} \right\}$ or
Buck/booster	$\left. \begin{array}{l}  C_{cl}  \neq 0,  C'_{cl}  = 0, \\  C_{cl}^*  = 0,  C'_{cl}  \neq 0 \end{array} \right\}$
<hr/>	
Booster type: $\frac{d+d'}{d}$ or $\frac{d+d'}{d'}$ .	
Buck type: $\frac{d}{d+d'}$ or $\frac{d'}{d+d'}$ .	
Buck/booster type: $\frac{d'}{d}$ or $\frac{d}{d'}$ .	

Figure 3.  $G(L; C)$  of two-switch DC-DC converters: (a) buck/booster type; (b) buck type; and (c) booster type.

Assume that  $\|Q_1\| = \|Q_3\|$ , then  $|C_{13}| \neq 0$  if and only if  $Q_3$  forms a tree of  $G(Q_2; Q_4)$ . In other words,  $|C_{13}| \neq 0$  if and only if  $\{Q_2, Q_3\}$  forms a tree of  $G$ .

From Lemmas 2 and 3 the topological criteria for characterizing DC-DC converters with two switches can be stated as follows:

**Theorem 1**

The circuit  $N$  with two switches is a buck/booster DC-DC converter if and only if the following two conditions are simultaneously satisfied:

- (i) the number of inductors is equal to that of capacitors (i.e.  $m = n$ ),
- (ii)  $G(L; C)$  has a topology shown in Figure 3(a).

**Remark 3**

The branches  $S_1$  and  $S_2$  in Figure 3(a) are exchangeable.

*Remark 4*

From Property 1, the subgraph  $G(C, E; L, R_o)$  forms a loop consisting of  $S_1$  and  $S_2$ .

*Remark 5*

Theorem 1 is a necessary and sufficient condition which holds without any specific topological assumptions, for example, converters are not necessarily a three-port device.

*Remark 6*

The subgraphs  $G(L; C)$  and  $G(C, E; L, R_o)$  correspond to the *dc circuit* and *ac circuit* defined in Reference [11], respectively.

*Proof of Theorem 1*

Condition (i) comes from Lemma 1. If condition (i) is satisfied, the condition for  $v_{out}$  in Equation (14) to be  $(d'/d)E$  or  $(d/d')E$  is as follows:

- (a)  $|C_{cl}| \neq 0 \wedge |C'_{cl}| = 0 \wedge |C^*_{cl}| = 0 \wedge |C'^*_{cl}| \neq 0$   
or  
(b)  $|C_{cl}| = 0 \wedge |C'_{cl}| \neq 0 \wedge |C^*_{cl}| \neq 0 \wedge |C'^*_{cl}| = 0.$

Noting that the branch  $R_o$  is located in parallel with  $C_n$ , it can be seen from Lemma 3 and Equation (2) that conditions (a) and (b) are equivalent to the following graph-theoretical conditions (A) and (B), respectively.

- (A) Both  $\{S_1, L, E\}$  and  $\{S_2, L, R_o\}$  form a tree of  $G$ , and there exists a loop in  $\{S_1, L, R_o\}$  and in  $\{S_2, L, E\}$  of  $G$ .  
(B)  $S_1$  and  $S_2$  are exchanged in (A).

Conditions (A) and (B) are further simplified to the following conditions (A') and (B'), respectively.

- (A') Both  $\{S_1, E\}$  and  $\{S_2, R_o\}$  form a tree of  $G(L; C)$ , and both  $\{S_1, R_o\}$  and  $\{S_2, E\}$  form a loop in  $G(L; C)$ .  
(B')  $S_1$  and  $S_2$  are exchanged in (A').

We can easily verify that the graph in Figure 3(a) is the only topology satisfying either (A') or (B').

*Remark 7*

Condition (ii) in Theorem 1 is well known to the power electronics community. The proof of Theorem 1 is based on Equations (6)–(9) and its algebraic graph theory, while other proofs [10, 11] may depend on some insights into the circuit's behaviour.  $\square$

*Example 1*

Figure 4 shows typical buck/boost converters with two switches and Figure 5 shows their associated graphs, from which we can easily see that they satisfy the conditions in Theorem 1.

*Example 2*

Consider the circuit in Figure 6(a) whose graph in Figure 6(b) satisfies the conditions in Theorem 1. This circuit indeed works as a buck/boost DC–DC converters. We carried out the switching circuit simulation program SCAT and obtained the numerical result about the convection ratio as shown in Figure 4(c).

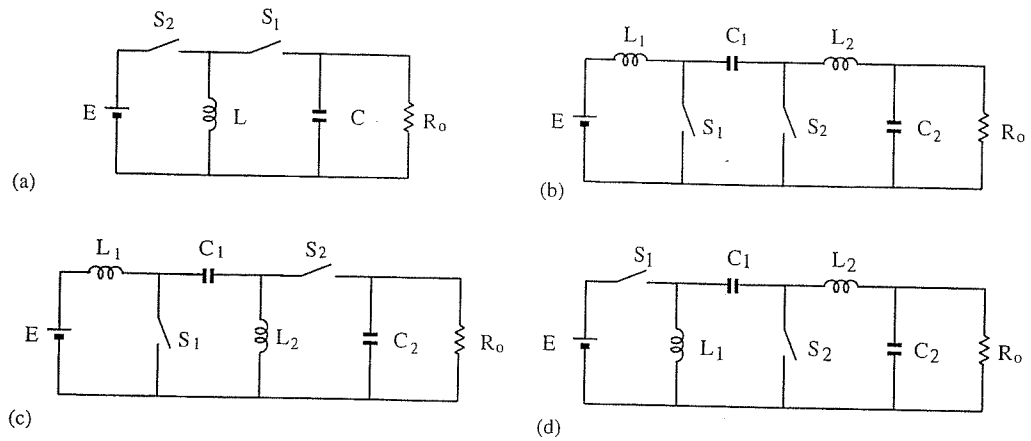


Figure 4. Fundamental buck/booster DC-DC converters: (a); (b) Cuk; (c) Sepic; and (d) Zeta.

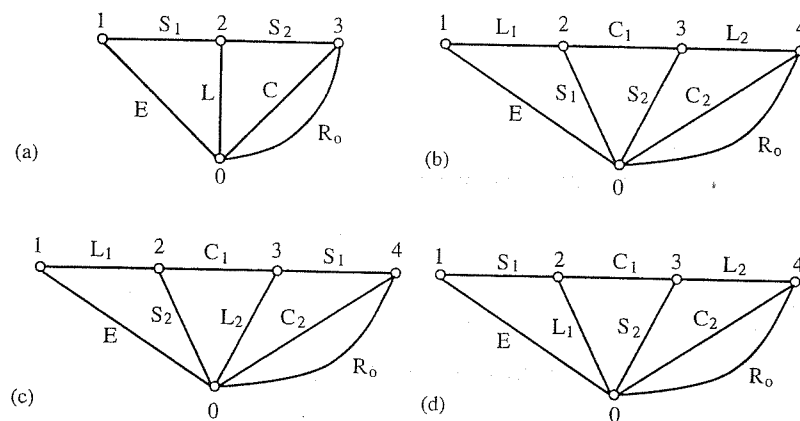


Figure 5. Graphs of fundamental buck/booster DC-DC converters: (a); (b) Cuk; (c) Sepic; and (d) Zeta.

#### 4.3. Topological condition for other type converters

The topological conditions for other type of converters are given as follows:

##### Theorem 2

The circuit  $N$  with two switches is a buck (resp. booster) DC-DC converter if and only if the following three conditions are simultaneously satisfied:

- (i) the number of inductors is equal to that of capacitors,
- (ii)  $G(L; C)$  has a topology shown in Figure 3(b) (resp. Figure 3(c)),
- (iii) Both loops  $G(L, E; C, R_o)$  (resp.  $G(L, R_o; C, E)$ ) and  $G(C, E; L, R_o)$  have the same direction.

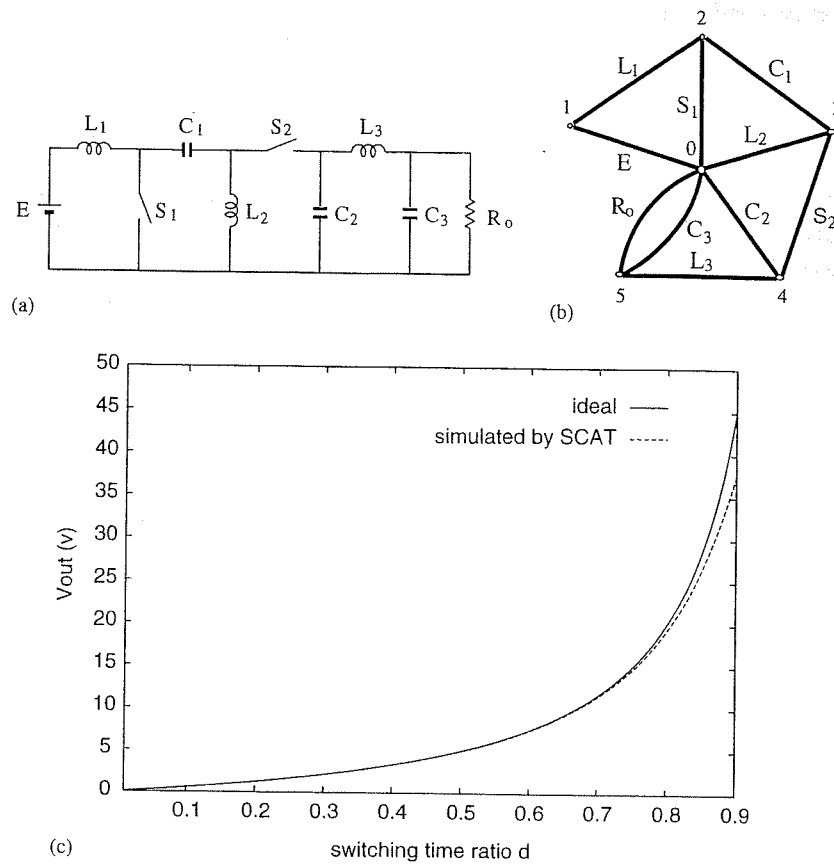


Figure 6. Example 2: (a) circuit; (b) graph; and (c) simulation result.

#### Proof of Theorem 2

Condition (i) comes from Lemma 1. When condition (i) is satisfied, then the condition for a buck converter are stated in the second row of Table I. From Lemma 2, the condition that either  $|C_{cl}^*| = 0$  or  $|C_{cl}'^*| = 0$  but not both holds and  $|C_{cl}| |C_{cl}'| \neq 0$  is equivalent to the following topological condition:

- (A)  $\{S_1, L, E\}$ ,  $\{S_2, L, E\}$ , and  $\{S_1, L, R_o\}$  form a tree and there exists a loop in  $\{S_2, L, R_o\}$  in the graph  $G$ ;  
or
- (B)  $S_1$  and  $S_2$  are exchanged in (A).

These conditions (A) and (B) can be further simplified to the following conditions (A') and (B'), respectively.

- (A')  $\{S_1, E\}$ ,  $\{S_2, E\}$ , and  $\{S_1, R_o\}$  form a tree in  $G(L; C)$ , and  $\{S_2, R_o\}$  forms a loop in  $G(L; C)$ .
- (B')  $S_1$  and  $S_2$  are exchanged in (A').

Hence condition (ii) in Theorem 2 is obtained. From Equation (4) we have

$$\begin{aligned} |C_{cl}| \cdot |C'_{cl}| &= |C_{cl}| \cdot |C_{cl} - C_{cl} C_{III}^{-1} C_{II}| \cdot |C_{III}|^2 \\ &= |C_{III}| \cdot |C_{III} - C_{II} C_{cl}^{-1} C_{cl}| \cdot |C_{cl}|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

The matrices  $C_{III}$  and  $C_{III} - C_{II} C_{cl}^{-1} C_{cl}$  correspond to the principal part of the fundamental cutset matrix of the subgraphs  $G(C, E; L, R_o)$  and  $G(L, E; C, R_o)$ , respectively. Therefore we have the condition (iii), since  $|C_{cl}| \cdot |C'_{cl}| = 1$  should be satisfied. The conditions for booster converters can be proved in a similar way.

*Remark 8*

If the second condition in Theorem 2 holds, we can see from Figure 3(b) (resp. Figure 3(c)) that the subgraph  $G(L, E; C, R_o)$  (resp.  $G(L, R_o; C, E)$ ) forms a loop consisting of  $S_1$  and  $S_2$ .  $\square$

Let us consider the case where the graph  $G$  has a special topological property.

*Definition 2 (Kajitani [14])*

In a graph we replace each set of series branches by a single branch; replace each set of parallel branches by a single branch. Repeat these steps until no more series or parallel combinations are possible. If the final graph is a single branch, then the graph is said to be *series-parallel*.  $\square$

*Corollary 1*

When the graph  $G$  is series-parallel, condition (iii) in Theorem 2 can be removed.

*Proof of Corollary 1*

By applying some two-isomorphic operations [14] for the series-parallel graph  $G$  we can obtain a graph  $\tilde{G}$  where  $S_1$  and  $S_2$  are connected to the same node. Since the fundamental cutset matrix of  $\tilde{G}$  equals  $C_f$  in Equation (2), we can apply Theorem 2 to the graph  $\tilde{G}$  instead of  $G$ . If  $\tilde{G}$  satisfies the conditions (i) and (ii) in Theorem 2, it can be seen from the property of  $\tilde{G}$  that both loops  $\tilde{G}(L, E; C, R_o)$  and  $\tilde{G}(C, E; L, R_o)$  always have the same direction, i.e., the third condition in Theorem 1 always holds. This completes the proof of Corollary 1.  $\square$

## 5. CONCLUSION

This paper presents a graph-theoretic approach to state-space averaging equations and topological conditions for a circuit to be switch-mode DC-DC converters with two switches. The topological conditions consist of the pair of subgraphs  $G(C, E; L, R_o)$  and  $G(L; C)$  corresponding to 'ac circuit' and 'dc circuit' [11], respectively. Our discussion is based on the graph-theoretic approach, and obtain the conditions, whereas the derivation of topological conditions is obscure in References [10, 11].

The proposed topological conditions give candidates for a converter including one diode and one switch by replacing one switch of  $N$  with a diode. In this case we examine which switch should be replaced or which polarity we should choose for the diode. This can easily

be done by examining the polarity of the voltage across a switch and the current flowing through the switch.

The proposed graph-theoretic approach can easily be generalized to the case where circuits have four switches and the topological conditions for four-switch buck/boost converters are discussed in Reference [12]. The results will be shown in subsequent paper.

#### APPENDIX A: PROOF OF LEMMA 2

Substituting Equation (4) into  $-H$  gives

$$\begin{aligned} -H^T &= dC_{cl} + d'(C_{cl} - C_{cII}C_{II}^{-1}C_{II}) \\ &= (d + d')C_{cl} - d'C_{cII}C_{II}^{-1}C_{II} \end{aligned} \quad (A1)$$

Therefore we have

$$|-H| \cdot |C_{III}| = \begin{vmatrix} C_{III} & C_{II} \\ d'C_{cII} & C_{cl} \end{vmatrix} \quad (A2)$$

Since the  $1 \times 1$  matrix  $C_{III} = \pm 1$  and  $d + d' = 1$ , we get

$$\begin{aligned} |-H| &= |C_{III}| \cdot \left\{ \begin{vmatrix} dC_{III} & C_{II} \\ 0 & C_{cl} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d'C_{III} & C_{II} \\ d'C_{cII} & C_{cl} \end{vmatrix} \right\} \\ &= |C_{III}|^2 \{d|C_{cl}| + d'|C_{cl} - C_{cII}C_{II}^{-1}C_{II}|\} \\ &= d|C_{cl}| + d'|C_{cl}'| \end{aligned} \quad (A3)$$

The numerator of Equation (13) can be calculated in a similar way. This completes the proof of Lemma 2.  $\square$

#### REFERENCES

1. Harada K *et al.* *Fundamentals of Switching Converters*. Corona Pub. Co.: Tokyo, Japan, 1992 (in Japanese).
2. Sum K. Kit. *Switch Mode Power Conversion*. Marcel Dekker: New York, 1984.
3. Nishi T, Oghishima T, Ogata M. Topological conditions on switched mode dc-dc converters. *ITC-CSCC'02*, July 2002; 1129–1132.
4. Wierzb GM. Op-amp relocation: a topological active network synthesis. *IEEE Transactions on Circuit Systems* 1986; **CAS-33**:469–475.
5. Ozawa T, Shinoda S, Yamada M. An equivalent-circuit transformation and its application to network-element-value calculation. *IEEE Transactions on Circuit Systems* 1983; **CAS-30**:432–441.
6. Tanaka M, Mori S. Topological formulations for the coefficient matrices of state equations for switched-capacitor networks. *IEEE Transactions on Circuit Systems* 1982; **CAS-29**:106–115.
7. Nishi T, Chua LO. Topological criteria for nonlinear resistive circuits containing controlled sources to have a unique solution. *IEEE Transactions on Circuit Systems* 1984; **CAS-31**:722–741.
8. Nishi T, Chua LO. Uniqueness of solution for non-linear resistive circuits containing CCCS's or VCVS's whose controlling coefficients are finite. *IEEE Transactions on Circuit Systems* 1986; **CAS-33**:381–397.



9. Wolaver DH. Basic constraints from graph theory for dc-to-dc conversion networks. *IEEE Transactions on Circuit Theory* 1972; **CT-19**:640–648.
10. Tymerski R, Vorpérian V. Generation, classification and analysis of switched-mode DC-to-DC converters by the use of converter cells. *Proceedings of IEEE INELEC* 1986; 181–195.
11. Chen J, Maksimović D, Erickson R. Buck-boost PWM converters having two independently controlled switches. *Power Electronics Specialists Conference, 2001. PESC. 2001 IEEE 32nd Annual*, vol. 2, 2001; 736–741.
12. Ogata M, Nishi T. Topological conditions for 4-switch DC–DC converters. *Proceedings of 2003 ISEE* 2003; 63–66.
13. Iri M (ed.). *Practice on Graph Theory: Fundamentals and Applications*. Corona Pub. Co.: Tokyo, Japan, 1983 (in Japanese).
14. Kajitani Y. *Graph Theory for Networks*. Shoukoudou Pub. Co.: Tokyo, Japan, 1979 (in Japanese).

# On Complete Stability of Three-Cell CNNs with Opposite-Sign Templates

Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi

Department of Computer Science and Communication Engineering

Kyushu University

6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka 812-8581

Email: {norikazu,nishi}@csce.kyushu-u.ac.jp

**Abstract**—A new sufficient condition for three-cell cellular neural networks (CNNs) with the opposite-sign template to be completely stable is presented in this paper. It is also shown that even though the self-coupling is greater than unity the state trajectory which never enters a total saturation region can exist.

## I. INTRODUCTION

Complete stability analysis is one of the most fundamental research topics in the field of cellular neural networks (CNNs) [1]. Many results on dynamical behavior of CNNs have been presented so far. However, the relation between the template of a CNN and its complete stability is not fully understood yet even for very simple models.

Let us consider one-dimensional (1-D) CNNs having the space-invariant template  $A = [a_{-1}, a_0, a_1]$  with  $a_0 > 1$ . If  $a_{-1}a_1 > 0$  the CNN is a cooperative or competitive system and thus completely stable under the assumption that the input-output function is approximated by a  $C^1$  function [2]. On the other hand, however, the complete stability for the case where  $a_{-1}a_1 < 0$  is not clarified yet. In this paper,  $A = [a_{-1}, a_0, a_1]$  with  $a_{-1}a_1 < 0$  is called the opposite-sign template. It was shown in [3] that a 1-D CNN is completely stable if  $a_1 = -a_{-1}$  and  $a_0 - 1 > 2|a_1|$ . This condition can be relaxed to  $a_0 - 1 > |a_{-1}| + |a_1|$  by applying the result given in [4]. However, this case is not interesting especially from the practical point of view because every total saturation region contains a stable equilibrium point. It was shown in [5] that a 1-D CNN is completely stable if  $a_1 = -a_{-1}$  and  $(a_0 - 1)/|a_1| > 1.25670414\dots$  are satisfied. Although it was claimed in [6] that a 1-D CNN is completely stable if  $a_1 = -a_{-1}$  and  $a_0 - 1 > |a_1|$ , the proof for this claim is not correct as shown in Section V. In [7] and [8], two types of behavior of 1-D CNNs called local diffusion and global propagation are defined, and the relation between the template value and the behaviors are clarified. However, complete stability analysis for the case where  $a_{-1}a_1 < 0$  and  $a_0 - 1 < |a_{-1}| + |a_1|$  is lacking. From these observations, we can say that no general result on complete stability for the case where  $a_{-1}a_1 < 0$  is available so far.

One-dimensional CNNs having the opposite-sign template are important not only from theoretical but also from practical point of view because some useful image processing tasks such

as connected component detector [9] can be performed by the opposite-sign template.

In this paper, we study the complete stability of three-cell CNNs with the opposite-sign template, which is a special case of the above-mentioned 1-D CNNs. The purpose of this paper is to extend the authors' previous result [10] where the necessary and sufficient condition for a two-cell CNN with the opposite-sign template to be completely stable was derived. As a result, a new sufficient condition for complete stability is derived. Although some results on dynamical behavior of three-cell CNNs have been presented so far [11], [12], [13], all of them are different from the one in the present paper.

## II. CNN MODEL

Let us consider CNNs described by the following differential equation:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + py_1(t) - sy_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + ry_1(t) + py_2(t) - sy_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) + ry_2(t) + py_3(t) \end{cases} \quad (1)$$

with

$$y_i(t) = f(x_i(t)) = \frac{1}{2}(|x_i(t) + 1| - |x_i(t) - 1|) \quad (2)$$

where  $x_i(t)$  and  $y_i(t)$  denote the state and output of the  $i$ -th cell at time  $t$ , respectively. A CNN described by (1) and (2) is considered to be a special case of 1-D CNNs having the space-invariant template

$$A = [r, p, -s]. \quad (3)$$

Throughout this paper, we will assume that

$$p > 1 \quad \text{and} \quad r, s > 0. \quad (4)$$

Let  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  and  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$  be the state vector and the output vector, respectively. The state trajectory of the system (1) with (2) passing through a given point  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  at  $t = 0$  is denoted by  $\phi(t, \mathbf{x}^{(0)}) = (\phi_1(t, \mathbf{x}^{(0)}), \phi_2(t, \mathbf{x}^{(0)}), \phi_3(t, \mathbf{x}^{(0)})) \in \mathbb{R}^3$ . A CNN is said to be completely stable if and only if for any initial state  $\mathbf{x}^{(0)}$  the state trajectory  $\phi(t, \mathbf{x}^{(0)})$  converges to some equilibrium point in  $\mathbb{R}^3$  as  $t$  goes to infinity.

### III. MAIN RESULTS

In this section, we will make a complete stability analysis under the assumption that

$$p - 1 > \max\{r, s\}. \quad (5)$$

*Lemma 1:* Assume that (4) and (5) hold. If  $|\phi_1(t, \mathbf{x}^{(0)})| = 1$  is satisfied at  $t = t_1$ , then  $f(\phi_1(t, \mathbf{x}^{(0)})) = f(\phi_1(t_1, \mathbf{x}^{(0)}))$  holds for all  $t \geq t_1$ . Similarly, if  $|\phi_3(t, \mathbf{x}^{(0)})| = 1$  is satisfied at  $t = t_2$ , then  $f(\phi_3(t, \mathbf{x}^{(0)})) = f(\phi_3(t_2, \mathbf{x}^{(0)}))$  holds for all  $t \geq t_2$ .

*Proof:* From (1) and (5) we have

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t)|_{x_1(t)=1} &= -1 + p - sf(x_2) \geq p - 1 - s > 0 \\ \dot{x}_1(t)|_{x_1(t)=-1} &= 1 - p - sf(x_2) \leq -(p - 1) + s < 0 \end{aligned}$$

which mean that once the state trajectory enters the region  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 1\}$  or  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq -1\}$  it will never leave there. Therefore the first part of the statement holds true. The second part can be proved in the same way. ■

*Lemma 2:* Assume that (4) and (5) hold. A state trajectory  $\phi(t, \mathbf{x}^{(0)})$  does not converge to an equilibrium point only if both  $|\phi_1(t, \mathbf{x}^{(0)})| < 1$  and  $|\phi_3(t, \mathbf{x}^{(0)})| < 1$  hold for all  $t$ .

*Proof:* Suppose that  $|\phi_1(t, \mathbf{x}^{(0)})| = 1$  holds for  $t = t_1$ . Then it follows from Lemma 1 that  $f(\phi_1(t, \mathbf{x}^{(0)})) = f(\phi_1(t_1, \mathbf{x}^{(0)}))$  holds for all  $t \geq t_1$ . By putting  $f(\phi_1(t_1, \mathbf{x}^{(0)})) = c$ , we can express the state equation for  $x_2(t)$  and  $x_3(t)$  for  $t \geq t_1$  as

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + py_2(t) - sy_3(t) + c \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) + ry_2(t) + py_3(t) \end{cases} \quad (6)$$

Since the matrix

$$\begin{bmatrix} p-1 & -s \\ r & p-1 \end{bmatrix}$$

is diagonal dominant due to (4) and (5),  $(\phi_2(t, \mathbf{x}^{(0)}), \phi_3(t, \mathbf{x}^{(0)}))$  converges to some point in  $\mathbb{R}^2$  [14]. This means the state trajectory  $\phi(t, \mathbf{x}^{(0)})$  of the original three-cell CNN converges to some point in  $\mathbb{R}^3$  if  $|\phi_1(t, \mathbf{x}^{(0)})| = 1$  holds for  $t = t_1$ . In the same way, we can also show that if  $|\phi_3(t, \mathbf{x}^{(0)})| = 1$  holds for  $t = t_2$  then  $\phi(t, \mathbf{x}^{(0)})$  converges to some point in  $\mathbb{R}^3$ . ■

Based on the above lemmas, we can obtain the following theorem which is the main result of this paper.

*Theorem 1:* Any CNN described by (1) and (2) is completely stable if (4) and (5) hold.

Note that, as far as three-cell CNNs are concerned, Theorem 1 is more general than the result of [5].

### IV. PROOF OF THEOREM 1

We will prove Theorem 1 by contradiction, that is, we first assume that there exists a state trajectory  $\phi(t, \mathbf{x}^{(0)})$  which does not converge, and then show this leads to a contradiction.

Let  $\phi^o(t, \mathbf{x}^{(0)})$  be any state trajectory which does not converge. Since it follows from Lemma 2 that

$$|\phi_1^o(t, \mathbf{x}^{(0)})| < 1 \quad \text{and} \quad |\phi_3^o(t, \mathbf{x}^{(0)})| < 1, \quad \forall t, \quad (7)$$

$\phi^o(t, \mathbf{x}^{(0)})$  is the solution of the system of differential equations:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (p-1)x_1(t) - sf(x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = rx_1(t) - x_2(t) - sx_3(t) + pf(x_2(t)) \\ \dot{x}_3(t) = (p-1)x_3(t) + rf(x_2(t)) \end{cases} \quad (8)$$

with the initial condition  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ . Let us introduce two new variables  $z_1(t)$  and  $z_2(t)$  defined by

$$\begin{cases} z_1(t) \triangleq rx_1(t) - sx_3(t) \\ z_2(t) \triangleq x_2(t). \end{cases} \quad (9)$$

Then (8) can be transformed into the following differential equations:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = (p-1)z_1(t) - 2rsf(z_2(t)) \\ \dot{z}_2(t) = z_1(t) - z_2(t) + pf(z_2(t)) \end{cases} \quad (10)$$

In the following, we will first make an analysis for the global dynamical behavior of the system (10) under the assumption (4) and (5). Making use of the results of this analysis, we will then prove Theorem 1.

#### A. Phase Portrait of System (10)

Let us first partition the state space  $\mathbb{R}^2$  of the system (10) into the following three regions:

$$R^{(i)} \triangleq \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in J^{(i)}\} \subset \mathbb{R}^2, \quad i \in \{-, 0, +\}$$

where  $J^{(-)}$ ,  $J^{(0)}$  and  $J^{(+)}$  are the intervals defined by

$$J^{(-)} \triangleq (-\infty, -1), \quad J^{(0)} \triangleq [-1, 1], \quad J^{(+)} \triangleq (1, \infty).$$

Since (10) is regarded as a linear system in each region, we can easily determine the location of nullclines and equilibrium point, as well as local stability of the equilibrium point.

1) *Region  $R^{(0)}$ :* Since  $f(z_2(t)) = z_2(t)$  holds in this region, Eq.(10) can be rewritten as

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = (p-1)z_1(t) - 2rsz_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = z_1(t) + (p-1)z_2(t) \end{cases} \quad (11)$$

Hence the  $z_1$ -nullcline and the  $z_2$ -nullcline are expressed by

$$N_1^{(0)} = \{(z_1, z_2) \mid z_2 = \frac{p-1}{2rs}z_1\}$$

and

$$N_2^{(0)} = \{(z_1, z_2) \mid z_2 = -\frac{1}{p-1}z_1\}$$

respectively. Since  $N_1^{(0)}$  and  $N_2^{(0)}$  intersects only at the origin, the origin is the unique equilibrium point of (10) in this region. Moreover, since the eigenvalues of the Jacobian matrix are given by  $(p-1) \pm i\sqrt{2rs}$ , the origin is an unstable focus.

2) *Region  $R^{(+)}$ :* Since  $f(z_2(t)) = 1$  holds in this region, (10) can be rewritten as

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = (p-1)z_1(t) - 2rs \\ \dot{z}_2(t) = z_1(t) - z_2(t) + p \end{cases} \quad (12)$$

Hence the  $z_1$ -nullcline and the  $z_2$ -nullcline are expressed by

$$N_1^{(+)} = \{(z_1, z_2) \mid z_1 = \frac{2rs}{p-1}\}$$

and

$$N_2^{(+)} = \{(z_1, z_2) \mid z_2 = z_1 + p\}$$

respectively. Since  $N_1^{(+)}$  and  $N_2^{(+)}$  intersects only at  $E^{(+)} = (2rs/(p-1), p + 2rs/(p-1))$ ,  $E^{(+)}$  is the unique equilibrium point of (10) in this region. Moreover, since the eigenvalues of the Jacobian matrix are  $(p-1)$  and  $-1$ ,  $E^{(+)}$  is a saddle point.

3) Region  $R^{(-)}$ : Since the flow is symmetric with respect to the origin, the dynamical behavior of (10) in this region is easily understood from that in the region  $R^{(+)}$ .

From the above observations, we can draw the phase portrait of the system (10) as shown in Fig. 1 where  $A = (-p + 1, 1)$  and  $A' = -A$  represent two breaking points of the  $z_2$ -nullcline, and  $B = (2rs/(p-1), 1)$  and  $B' = -B$  represent two breaking points of the  $z_1$ -nullcline.

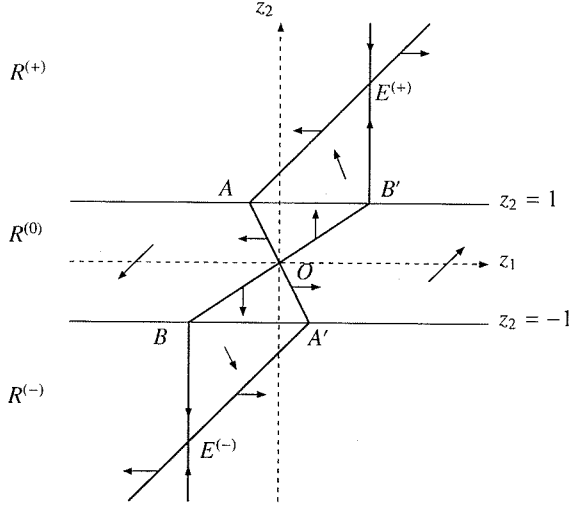


Fig. 1. Phase portrait of the system (10)

#### B. Asymptotic Behavior of Trajectories of System (10)

Let  $\psi(t, z^{(0)}) = (\psi_1(t, z^{(0)}), \psi_2(t, z^{(0)}))$  be the trajectory of the system (10) passing through a point  $z^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ . In this subsection, we will consider the asymptotic behavior of  $\psi(t, z^{(0)})$ .

**Lemma 3:** Assume that (4) and (5) hold. Then  $\psi_1(t, A)$  decreases monotonically and satisfies

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_1(t, A) = -\infty \quad (13)$$

**Proof:** Since the flow on the point  $A$  is downward,  $\psi(t, A)$  enters the region  $R^{(0)}$  as  $t$  increases from 0. It is obvious from Fig. 1 that if  $\psi(t, A)$  ( $t > 0$ ) does not cross the line segment  $BO$  then (13) holds. We will prove this by contradiction. Let us suppose that  $\psi(t, A)$  crosses  $BO$  at  $t = t_1 (> 0)$ . From the differential equation (11) and the initial condition  $A = (-p + 1, 1)$ , the trajectory  $\psi(t, A)$  for  $0 \leq t \leq t_1$  is explicitly expressed as follows:

$$\begin{aligned} \psi_1(t, A) &= e^{(p-1)t} \left\{ -(p-1) \cos \sqrt{2rst} - \sqrt{2rs} \sin \sqrt{2rst} \right\} \\ \psi_2(t, A) &= e^{(p-1)t} \left( \cos \sqrt{2rst} - \frac{p-1}{\sqrt{2rs}} \sin \sqrt{2rst} \right) \end{aligned}$$

By differentiating  $\psi_1(t, A)$  with respect to  $t$ , we have

$$\dot{\psi}_1(t, A) = e^{(p-1)t} \left[ -\{(p-1)^2 + 2rs\} \cos \sqrt{2rst} \right].$$

Since  $\dot{\psi}_1(t, A) = 0$  holds at  $t = t_1$ , the value of  $t_1$  is given by

$$t_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2rs}}$$

from which we have

$$\psi_2(t_1, A) = -\exp\left(\frac{\pi(p-1)}{2\sqrt{2rs}}\right) \times \frac{p-1}{\sqrt{2rs}}.$$

In order for  $\psi_2(t_1, A)$  to be greater than or equal to  $-1$ , the parameters  $p$ ,  $r$  and  $s$  must satisfy

$$\frac{p-1}{\sqrt{2rs}} \leq 0.474541 \dots \quad (14)$$

On the other hand, however, it follows from (5) that

$$p-1 \geq \sqrt{rs}$$

which contradicts (14). Therefore  $\psi_1(t, A)$  decreases monotonically and goes to  $-\infty$ . ■

**Lemma 4:** Any trajectory  $\psi(t, z^{(0)})$  of system (10) either converges to one of three equilibrium points  $O$ ,  $E^{(+)}$  and  $E^{(-)}$  or satisfies  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi_1(t, z^{(0)})| = \infty$ .

**Proof:** Since the origin is an unstable focus, any trajectory  $\psi(t, z^{(0)})$  such that  $z^{(0)} \in R^{(0)}$  enter either  $R^{(+)}$  or  $R^{(-)}$  at least once except the case where  $z^{(0)} = O$ . It is obvious that if  $z^{(0)} = O$  then  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, O) = O$  holds. So we can hereafter concentrate our attention on the case where  $z^{(0)} \in R^{(+)} \cup R^{(-)}$ . Let us first assume that  $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)}) \in R^{(+)}$ . It is obvious from Fig. 1 that if  $z_1^{(0)} = 2rs/(p-1)$  then  $\psi(t, z^{(0)})$  converges to  $E^{(+)}$  as  $t \rightarrow \infty$ . Also it is easily seen that if  $z_1^{(0)} > 2rs/(p-1)$  then  $\psi_1(t, z^{(0)})$  increases monotonically and  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_1(t, z^{(0)}) = \infty$  holds. On the other hand, if  $z_1^{(0)} < 2rs/(p-1)$  then  $\psi(t, z^{(0)})$  crosses the line  $z_2 = 1$  at some point to the left of  $A$  and leave the region  $R^{(+)}$ . Since  $\psi(t, A)$  does not cross the line segment  $BO$  and two different trajectories never intersect each other,  $\psi(t, z^{(0)})$  does not cross  $BO$  and satisfies  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_1(t, z^{(0)}) = -\infty$ . As for the case where  $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)}) \in R^{(-)}$ , we can show in the same way as above that  $\psi(t, z^{(0)})$  either converges to  $E^{(-)}$  or satisfies  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi_1(t, z^{(0)})| = \infty$ . ■

#### C. Proof of Theorem 1

We are now in a position to prove Theorem 1.

**Proof:** It follows from Lemma 4 that any nonconvergent trajectory  $\phi^o(t, x^{(0)})$  satisfies either i)  $\phi_2^o(t, x^{(0)})$  converges to some constant value as  $t \rightarrow \infty$  or ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} |r\phi_1^o(t, x^{(0)}) - s\phi_3^o(t, x^{(0)})| = \infty$ . If  $x_2(t)$  is fixed to some constant value, say  $c$ , both  $x_1(t)$  and  $x_3(t)$  converge because in this case (1) can be regarded as two independent one-cell CNNs:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + py_1(t) - sf(c) \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) + py_3(t) + rf(c) \end{cases}$$

In Case i), therefore, both  $\phi^o(t, x^{(0)})$  and  $\phi_3^o(t, x^{(0)})$  must converge. However, this contradicts the assumption that  $\phi^o(t, x^{(0)})$  is nonconvergent. On the other hand, Case ii) implies that either  $|\phi_1^o(t, x^{(0)})|$  or  $|\phi_3^o(t, x^{(0)})|$  tends to infinity. Since this contradicts (7), we can conclude that the assumption that there exists a nonconvergent trajectory  $\phi(t, x^{(0)})$  is wrong. ■

## V. ON STABILITY ANALYSIS BY JOY AND TAVSANOGLU

Joy and Tavsanoglu [6] have studied the complete stability of 1-D  $n$ -cell CNNs with the template

$$A = [s, p, -s]$$

and given a proof that any trajectory  $\phi(t, \mathbf{x}^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$  satisfying  $|x_i^{(0)}| < 1$  for  $i = 1, 2, \dots, n$  converges to a stable equilibrium point if

$$0 < (p - 1)/2 < s < p - 1. \quad (15)$$

As the first step of the proof, they have claimed that any non-constant trajectory  $\phi(t, \mathbf{x}^{(0)})$  with  $|x_i^{(0)}| < 1$  for  $i = 1, 2, \dots, n$  satisfies  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi_1(t, \mathbf{x}^{(0)})| > 1$ . This claim is based only on the fact that the eigenvalue of Jacobian matrix corresponding to the first component has positive real part in the linear region and all partial saturation regions if  $p > 1$ .

However, we can show that there exists a trajectory  $\phi(t, \mathbf{x}^{(0)})$  satisfying  $|\phi_1(t, \mathbf{x}^{(0)})| < 1$  and  $|\phi_3(t, \mathbf{x}^{(0)})| < 1$  for all  $t$  even though  $p > 1$  holds. Let us consider a three-cell CNN described by

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + py_1(t) - sy_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + sy_1(t) + py_2(t) - sy_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) + sy_2(t) + py_3(t) \end{cases} \quad (16)$$

where  $p = 1.1$  and  $s = 1.0$ . By solving this system of differential equations numerically under the initial condition  $\mathbf{x}^{(0)} = (0.025, -0.05, -0.025)$ , we see that the trajectory  $\phi(t, \mathbf{x}^{(0)})$  converges to a limit cycle as shown in Fig. 2. Also, waveform of  $\phi_1(t, \mathbf{x}^{(0)})$  is shown in Fig. 3 where we see that  $|\phi_1(t, \mathbf{x}^{(0)})| < 1$  holds for all  $t$ .

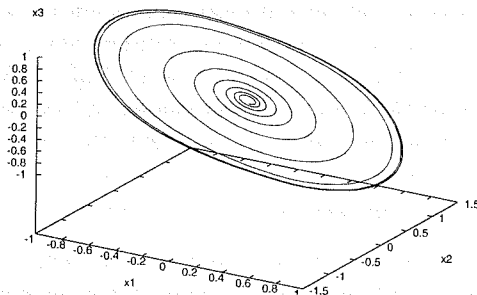


Fig. 2. Trajectory  $\phi(t, (0.025, -0.05, -0.025))$  for  $t \geq 0$ .

The above example tells us that the stability analysis done by Joy and Tavsanoglu is not sufficient. However, this does not mean that their main result is wrong. In fact, it follows from Theorem 1 that a three-cell CNN described by (16) is completely stable if (15) is satisfied.

## VI. CONCLUSION

We have derived a new sufficient condition for a three-cell CNN with the opposite-sign template to be completely stable. To derive necessary and sufficient condition for complete stability is a future problem.

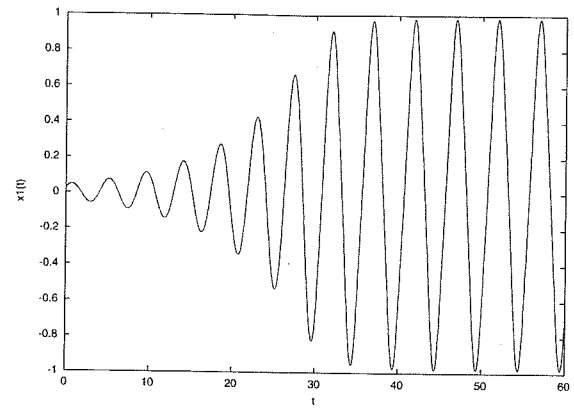


Fig. 3. Waveform of  $\phi_1(t, (0.025, -0.05, -0.025))$  for  $t \geq 0$ .

## ACKNOWLEDGMENT

This research was partly supported by the 21st Century COE Program 'Reconstruction of Social Infrastructure Related to Information Science and Electrical Engineering'.

## REFERENCES

- [1] L. Chua and L. Yang, "Cellular neural networks: Theory," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 35, no. 10, pp. 1257–1272, 1988.
- [2] L. Chua and C. Wu, "On the universe of stable cellular neural networks," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 20, pp. 497–517, 1992.
- [3] F. Zou and J. A. Nossek, "Stability of cellular neural networks with opposite-sign templates," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 38, no. 6, pp. 675–677, 1991.
- [4] F. Savaci and J. Vandewalle, "On the stability analysis of cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 40, no. 3, pp. 213–215, 1993.
- [5] G. De Sandre, "Stability of 1-D-CNN's with Dirichlet boundary conditions and global propagation dynamics," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 47, no. 6, pp. 785–729, 2000.
- [6] M. P. Joy and V. Tavsanoglu, "A new parameter range for the stability of opposite-sign cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 40, no. 3, pp. 204–207, 1993.
- [7] P. Thiran, G. Setti, and M. Hasler, "An approach to information propagation in 1-d cellular neural networks—Part I: Local diffusion," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 45, no. 8, pp. 777–789, 1998.
- [8] G. Setti, P. Thiran, and C. Serpico, "An approach to information propagation in 1-d cellular neural networks—Part II: Global propagation," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 45, no. 8, pp. 790–811, 1998.
- [9] T. Matsumoto, L. Chua, and H. Suzuki, "Cnn cloning template: Connected component detector," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 37, no. 5, pp. 633–635, 1990.
- [10] N. Takahashi and T. Nishi, "Necessary and sufficient condition for two-cell CNNs with space-invariant connections to be globally stable," in *2004 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, Oct. 2002, pp. 611–614.
- [11] F. Zou and J. A. Nossek, "Bifurcation and chaos in cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 40, no. 3, pp. 166–173, 1993.
- [12] F. Zou, A. Katérle, and J. A. Nossek, "Homoclinic and heteroclinic orbits of the three-cell cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 40, no. 11, pp. 843–848, 1993.
- [13] P. P. Civalleri and M. Gilli, "Global dynamic behaviour of a three-cell connected component detector CNN," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 23, pp. 117–135, 1995.
- [14] N. Takahashi and L. O. Chua, "On the complete stability of nonsymmetric cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 45, no. 7, pp. 754–758, 1998.

# Graph-Theoretic Approach to the Design of Four-Switch DC-DC Converters

Masato Ogata  
Department of Computer Science  
and Communication Engineering  
Kyushu University  
Fukuoka, Japan 812-8581  
Email: mogata@csce.kyushu-u.ac.jp

Tetsuo Nishi  
Department of Computer Science  
and Communication Engineering  
Kyushu University  
Fukuoka, Japan 812-8581  
Email: nishi@csce.kyushu-u.ac.jp

**Abstract**—This paper presents a graph-theoretic approach to analyze and synthesize DC-DC converters with four switches. The results are based on the state-space averaging equation and the fundamental graph theory. The proposed method can provide whole families of converters with four switches systematically.

## I. INTRODUCTION

Recently DC-DC converters are widely used as an on-board power supply for personal computers and many electronic appliances. There are various kinds of DC-DC converters, for example, pulse-width modulator (PWM) type, resonant type, switched-capacitor type, switch mode type, continuous conduction mode (CCM) type, discontinuous conduction mode (DCM) type, and so on[1]. Switch mode DC-DC converters are power conversion circuits which can step up (boost) or step down (buck) the input DC voltage according to the switching duty ratio  $d$  where  $d$  denotes the steady-state ON time duty ratio. These converters usually consist of inductors, capacitors, switches, diodes, and a load resistance. One of the most important factors to decide the converter's performance is the topology of these circuits.

Though topological approach has been successfully applied to many areas of circuit theory[2]–[4], there are only a few attempts to power converters[5]–[7]. The unified topological method for classification and analysis of three-terminal DC-DC converter cells are given in [6]. Several buck-booster converters with four switches are shown by means of pairs of *ac circuits* and *dc circuits* in [7]. In our previous works[8]–[9], the graph-theoretic approach to state-space averaging equations for switch-mode DC-DC converters with *two* switches was shown. In this paper we extend this result to the four-switch converters.

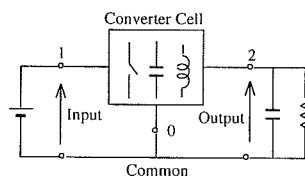


Fig. 1. General structure of DC-DC converters

Let  $f(d)$  be a conversion ratio of a three terminal converter. Then, the conversion ratios  $\frac{1}{f(d)}$ ,  $1 - f(d)$ ,  $\frac{1}{1-f(d)}$ , etc. are also obtained from the same converter cell[6]. So we treat the realization of three-terminal converters with the ratio  $1 - \frac{1}{d}$  in this paper.

In Section 2 some preliminaries and assumptions are given. The averaged output of a converter is formulated in Section 3. Topological condition for four-switch converters are presented in Section 4. The obtained conditions yield the whole families of four-switch converters in principal.

## II. PRELIMINARIES

We consider a circuit  $N$  consisting of  $m$  inductors,  $L_i (i = 1, \dots, m)$ ,  $n$  capacitors,  $C_i (i = 1, \dots, n)$ , one DC voltage source,  $E$ , one output resistor,  $R_o$ , and four ideal switches,  $S_1, S_2, S_3$ , and  $S_4$ .

**Remark 1:** Though transformers are usually used in floating-type DC-DC converters, we exclude them in this paper. For the sake of simplicity we also exclude diodes (dependent switches) which are usually basic elements of DC-DC converters since we can replace them with ideal switches (active switches).

Let  $G$  be a directed graph associated with  $N$ . The symbol  $L_i$  denotes an inductor branches well as an inductance. Symbols  $C_i, E, R_o, S_1, S_2, S_3$ , and  $S_4$  are similarly used in this paper. We assume the following:

**Assumption 1:** The output resistor  $R_o$  is connected in parallel with  $C_n$ . Both DC voltage source  $E$  and output resistor  $R_o$  are grounded. See Fig.1

**Assumption 2:** The circuit  $N$  operates in two phases synchronously. We partition four switches into two classes;  $S^I \equiv \{S_1, S_2\}$  and  $S^{II} \equiv \{S_3, S_4\}$ . When the switches  $S^I$  are ON, then  $S^{II}$  are OFF (Phase I), and in the next phase the converse holds (Phase II).

Let  $d$  and  $d'$  be the duty ratio of Phases I and II, respectively

**Assumption 3:** The voltages and currents of all elements during the switching period vary slowly.

We have the following topological assumptions:

**Assumption 4:** There exists no loop consisting of  $E$  and  $\{C_i\}$  only.

**Assumption 5:** There exists no cutset consisting of  $\{L_i\}$  only.

**Assumption 6:** There exists no loop consisting of  $E$ ,  $\{C_i\}$ , and some ( $\geq 1$ ) switches in  $S^I$ . Also there exists no loop consisting of  $E$ ,  $\{C_i\}$ , and some ( $\geq 1$ ) switches in  $S^II$ .

**Assumption 7:** There exists no cutset consisting of  $\{L_i\}$  and some ( $\geq 1$ ) switches in  $S^I$ . Also there exists no cutset consisting of  $\{L_i\}$  and some ( $\geq 1$ ) switches in  $S^II$ .

**Remark 2:** Assumptions 4-7 are the necessary conditions to guarantee that the circuit  $N$  works in continuous conduction mode (CCM). Indeed all practical CCM converters in which diodes are replaced by ideal switches should satisfy these topological assumptions.

The following graph and operation are used for describing our discussion.

**Definition 1:** Let  $Q_1$  and  $Q_2$  be disjoint subsets of branches in  $G$ . The symbol  $G(Q_1; Q_2)$  denotes a subgraph obtained from the original graph  $G$  by short-circuiting  $Q_1$  and open-circuiting  $Q_2$ .

**Definition 2:** (slide operation) Let two branches  $b_1$  and  $b_2$  be connected between the nodes  $(v_1, v_2)$  and  $(v_2, v_3)$  in the graph  $G$ , respectively. The slide operation  $S(b_1 : b_2)$  makes the branch  $b_1$  slide along the branch  $b_2$  so that the branch  $b_1$  is connected between  $(v_1, v_3)$ .

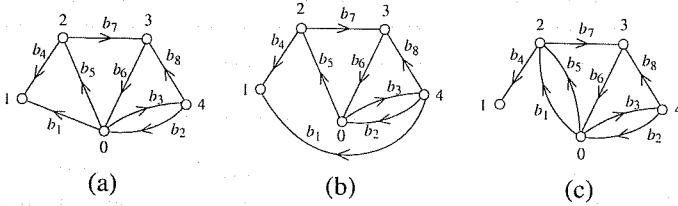


Fig. 2. Example for the slide operation. The branches  $b_1$  and  $b_2$  are in the same direction along the path  $\{b_1, b_2\}$ , while the directions of  $b_1$  and  $b_4$  are opposite along the path  $\{b_1, b_4\}$  in the graph (a). The graphs (b) and (c) are obtained by the operations  $S(b_1 : b_2)$  and  $S(b_1 : b_4)$ , respectively.

### III. AVERAGED OUTPUT VOLTAGE OF CONVERTER CELLS

Assumptions 4-7 ensure that branches  $S^I$ ,  $E$  and  $\{C_i\}$  constitute a tree of  $G$ . Then the primary part of fundamental cutset matrix  $C_{fp}$  can be written in the form:

$$C_{fp} \equiv \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_n \\ E \end{matrix} \begin{bmatrix} S_3 & S_4 & L & R_o \\ \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} & 0 \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & p_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & p_n & 1 \\ \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & p_{n+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

where  $p_i$  denotes a row vector of degree  $m$ .

Since the branches  $E$  and  $R_o$  have a common node (ground), let  $\tilde{G}$  be a graph obtained by applying the operation  $S(E : R_o)$  to the graph  $G$ . The branches  $S^I$ ,  $E$  and  $\{C_i\}$  also form a tree of  $\tilde{G}$ . The primary part of fundamental cutset matrix  $\tilde{C}_{fp}$  of  $\tilde{G}$  can be obtained from  $C_{fp}$  in Eq.(1) by adding

the last row multiplied by +1 to the  $(n+2)$ -th row as:

$$\tilde{C}_{fp} \equiv \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_n \\ E \end{matrix} \begin{bmatrix} S_3 & S_4 & L & R_o \\ \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} & 0 \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & p_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n + \alpha_{n+1} & \beta_n + \beta_{n+1} & p_n + p_{n+1} & 1 \\ \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & p_{n+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Without loss of generality, the  $(S^I, S^II)$ -block of  $C_{fp}$  is assumed to be

$$\begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

**Property 1:** The  $2 \times 2$  matrix  $C_{II} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix}$  is the fundamental cutset matrix of the subgraph  $G(C, E; L, R_o)$  with respect to the tree  $\{S_1, S_2\}$ .

**Remark 3:** The direction of each switch branch is assigned so that the subgraph  $G(C, E; L, R_o)$  satisfies the cutset matrix in Eq.(3). See Fig.3.

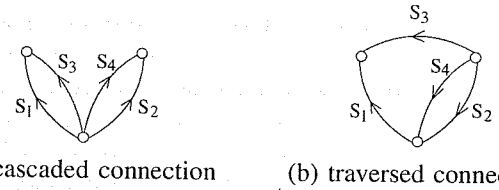


Fig. 3. Candidates for the subgraph  $G(C, E; L, R_o)$

From the state-space averaging analysis, the averaged output of  $N$  can be written in terms of the fundamental cutset matrix in (1) as follows [8],[9]:

**Lemma 1:** Both denominator and numerator of the output voltage of  $N$  do not vanish for  $0 < d, d' < 1$  only if  $m = n$  holds, that is, the number of inductors is equal to that of capacitors. Under  $m = n$ , the averaged output voltage  $v_o$  of  $N$  is

$$v_o = \frac{\Delta_n}{\Delta_d} E = \frac{b_1 d^2 + b_2 d d' + b_3 d'^2}{a_1 d^2 + a_2 d d' + a_3 d'^2} E \quad (4)$$

where

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ d' \alpha_1 & d' \beta_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d' \alpha_{n-1} & d' \beta_{n-1} & p_{n-1} \\ d' \alpha_n & d' \beta_n & p_n \end{vmatrix}, \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ d' \alpha_1 & d' \beta_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d' \alpha_{n-1} & d' \beta_{n-1} & p_{n-1} \\ d' \alpha_{n+1} & d' \beta_{n+1} & p_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ 0 & 0 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & p_{n-1} \\ 0 & 0 & p_n \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ \alpha_1 & \beta_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & p_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n & p_n \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ 0 & \beta_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta_{n-1} & p_{n-1} \\ 0 & \beta_n & p_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} & p_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} & p_{02} \\ \alpha_1 & 0 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 0 & p_{n-1} \\ \alpha_n & 0 & p_n \end{vmatrix}.$$

The coefficients  $b_1$ ,  $b_2$ , and  $b_3$  are the same as  $a_1$ ,  $a_2$ , and  $a_3$  except that the suffix  $n$  of the last row is replaced with  $n+1$ , respectively.

From Eq.(4), we have four cases for conversion ratio to realize  $-\frac{d'}{d} (1 - \frac{1}{d})$ :

$$(I) -\frac{dd'}{d^2} \quad (II) -\frac{d'^2}{dd'} \quad (III) -\frac{d'(d+d')}{d(d+d')} \quad (IV) -\frac{d'(d-d')}{d(d-d')}$$

The necessary and sufficient condition for the circuit  $N$  to have the conversion ratio (I) can be stated as follows:

**Lemma 2:** The circuit  $N$  has the conversion ratio (I) if and only if :

$$\begin{vmatrix} p_1^T & \cdots & p_{n-1}^T & p_n^T \\ \hat{\alpha}_{01} & \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\alpha}_{02} & \hat{\beta}_{02} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} p_1^T & \cdots & p_{n-1}^T & p_{n+1}^T \\ \hat{\alpha}_{01} & \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\alpha}_{02} & \hat{\beta}_{02} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \hat{\beta}_{01} \\ \alpha_{02} & \hat{\beta}_{02} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{01} & \tilde{\beta}_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} & \tilde{\beta}_{02} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{01} & \tilde{\beta}_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} & \tilde{\beta}_{02} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \tilde{\beta}_{01} \\ \alpha_{02} & \tilde{\beta}_{02} \end{vmatrix} = -1$$

where

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{01} & \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\alpha}_{02} & \hat{\beta}_{02} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{01} \\ p_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{01} & \tilde{\beta}_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} & \tilde{\beta}_{02} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{01} \\ p_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n + p_{n+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n + \beta_{n+1} \end{bmatrix}$$

From Eqs.(1) and (2) the matrices in Lemma 2 can be related with subgraphs obtained from the graphs  $G$  and  $\tilde{G}$ [4],[10].

**Property 2:** The  $2 \times 2$  matrix  $\hat{C}_{II} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{01} & \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\alpha}_{02} & \hat{\beta}_{02} \end{bmatrix}$  is the fundamental cutset matrix of the subgraph  $G(L, E; C, R_o)$  with respect to the tree  $\{S_1, S_2\}$ .

**Property 3:** The  $2 \times 2$  matrix  $\tilde{C}_{II} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{01} & \tilde{\beta}_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} & \tilde{\beta}_{02} \end{bmatrix}$  is the fundamental cutset matrix of the subgraph  $\tilde{G}(L, E; C, R_o)$  with respect to the tree  $\{S_1, S_2\}$ .

*Proof of Lemma 2:* For Eq.(4) to satisfy the conversion ratio (I), we require that  $a_1 \neq 0$  and  $b_1 = 0$ . Thus,

$$\begin{vmatrix} p_1^T & \cdots & p_{n-1}^T & p_n^T \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5)$$

$$\begin{vmatrix} p_1^T & \cdots & p_{n-1}^T & p_{n+1}^T \end{vmatrix} = 0$$

Then the addition of these determinants gives

$$\begin{vmatrix} p_1^T & \cdots & p_{n-1}^T & p_n^T + p_{n+1}^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1^T & \cdots & p_{n-1}^T & p_n^T \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

Now note that  $d + d' = 1$ . Hence,

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{vmatrix} \cdot \left| \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} - d' \begin{bmatrix} p_{01} \\ p_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{vmatrix} \cdot \left| d \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} + d' \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{01} & \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\alpha}_{02} & \hat{\beta}_{02} \end{bmatrix} \right|. \quad (7)$$

Similarly,

$$\Delta_d + \Delta_n = \begin{vmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n + p_{n+1} \end{vmatrix} \cdot \left| d \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \beta_{01} \\ \alpha_{02} & \beta_{02} \end{bmatrix} + d' \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{01} & \tilde{\beta}_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} & \tilde{\beta}_{02} \end{bmatrix} \right|. \quad (8)$$

Noting  $|C_{II}| = 1$  and Eq.(6), we set the coefficients in Eq.(4) as  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -1$ , and  $b_3 = 0$  to realize the conversion ratio (I). From Eqs.(7) and (8) we have the conditions for conversion ratio (I).  $\square$

#### IV. MAIN RESULTS

Translating Lemma 2 into the topological conditions, we obtain the following result.

**Theorem 1:** Suppose the subgraph  $G(C, E; L, R_o)$  has *cascaded connection* as shown in Fig.3(a). The circuit  $N$  with four switches is the buck-booster converter with DC voltage ratio (I) if and only if exactly one of the following conditions i)-iv) holds.

- $G(L, S_2; C, S_4)$  is the graph in Fig.4(a) and there exists no loop consisting of  $S_2$  and  $S_4$  exclusively in  $G(L; C)$ .
- $G(L, S_1; C, S_3)$  is the graph in Fig.4(b) and there exists no loop consisting of  $S_1$  and  $S_3$  exclusively in  $G(L; C)$ .
- $G(L; C)$  is the graph in Fig.4(c).
- $G(L; C)$  is the graph in Fig.4(d).

**Remark 4:** The subgraphs  $G(L; C)$  and  $G(C, E; L, R_o)$  correspond to the *dc circuit* and *ac circuit* defined in Ref.[7], respectively.

**Remark 5:** The directions of switch branches in Fig.4 are essential, though the ideal switch itself has no polarity. This is caused by the assignment of branch direction in Remark 3. The directions of  $S_1$  and  $S_3$  (resp.  $S_2$  and  $S_4$ ) are linked to



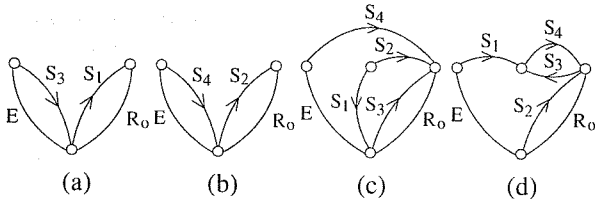


Fig. 4. Candidates for the subgraph in Theorem 1

each other, i.e., if we change the direction of  $S_1$ , the direction of  $S_3$  is also changed in Fig.4.

**Remark 6:** The branches  $S_1$  and  $S_2$  (resp.  $S_3$  and  $S_4$ ) in Figs.4(c) and (d) are exchangeable.

**Remark 7:** The graph in Figs.4(a) and (b) satisfies the conditions (A), (B1), (C), and (D), while the conditions (A), (B1), (C), and (D) hold simultaneously in the graph in Figs.4(c) and (d).

We have the following corollary from Theorem 1.

**Corollary 1:** Suppose the subgraph  $G(C, E; L, R_o)$  has *traversed connection* as shown in Fig.3(b). Let  $\mathcal{G}$  denote a graph obtained from the subgraph  $G(L; C)$  by the operation  $\mathcal{S}(S_1 : S_2)$ . The circuit  $N$  with four switches has the DC voltage ratio (I) if and only if exactly one of the following conditions i)–iv) holds.

- i)  $\mathcal{G}(S_2; S_4)$  is the graph in Fig.4(a) and there exists no loop consisting of  $S_2$  and  $S_4$  exclusively in  $\mathcal{G}$ .
- ii)  $\mathcal{G}(S_1; S_3)$  is the graph in Fig.4(b). and there exists no loop consisting of  $S_1$  and  $S_3$  exclusively in  $\mathcal{G}$ .
- iii)  $\mathcal{G}$  is the graph in Fig.4(c).
- iv)  $\mathcal{G}$  is the graph in Fig.4(d).

**Remark 8:** The topological conditions for other conversion ratios (II)–(IV) can be obtained in the similar way.

**Remark 9:** We can construct the original graph  $G$  satisfying a pair of any two subgraphs  $G(C, E; L, R_o)$  and  $G(L; C)$  in Theorem 1 and Corollary 1 by inserting at most nine pairs of inductors and capacitors.

**Example 1:** Let us make a three-terminal buck-boost converter with four switches from Theorem 1. By adding three pairs of inductors and capacitors, we have a graph in Fig.5(a) which satisfies two subgraphs  $G(C, E; L, R_o)$  in Fig.3(a) and  $G(L; C)$  in Fig.4(c) simultaneously. The red in Fig.5(a) denotes a capacitor branch, while the blue is an inductor one. Fig.6 shows the averaged output voltage of the circuit in Fig.5(b) computed by the switching circuit simulation program SCAT [11] (red line) and the theoretical value (green line) for the case where  $E = 5V$  and the switching frequency is 0.1MHz. We can see from the numerical results in Fig.6 that the circuit in Fig.5(b) indeed works as a buck-boost converter.

## V. CONCLUSION

In this paper we show the graph theoretic approach to state-space averaging analysis and the topological conditions for the buck-boost converter with four switches. In principal the

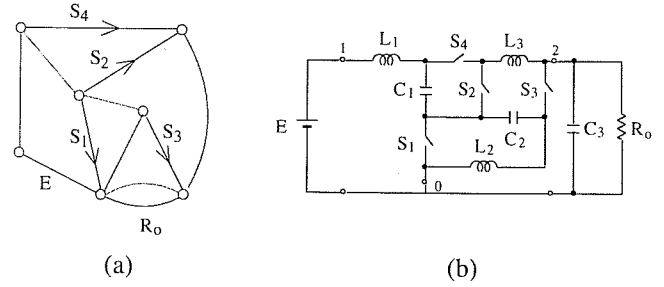


Fig. 5. Example for three-terminal buck-boost converter with four switches; (a) graph satisfying the subgraphs  $G(C, E; L, R_o)$  in Fig.3(a) and  $G(L; C)$  in Fig.4(c) simultaneously; (b) circuit whose topology is given by the graph in Fig.5(a).

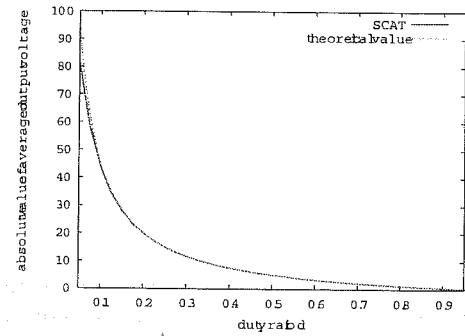


Fig. 6. Averaged output voltage of the circuit in Fig.5(b) computed by the SCAT program

obtained topological conditions yield the whole families of three-terminal converter with four switches.

## REFERENCES

- [1] K. Harada, et al, Fundamentals of switching converters, (in Japanese) Corona Co., 1992.
- [2] G. M. Wierzbka, "Op-amp relocation: A topological active network synthesis," *IEEE Trans. Circuit Syst.*, vol. CAS-33, pp. 469 - 475, May 1986.
- [3] M. Tanaka and S. Mori, "Topological formulations for the coefficient matrices of state equations for switched-capacitor networks," *IEEE Trans. Circuit Syst.*, vol. CAS-29, pp. 106 - 115, February 1982.
- [4] T. Nishi T and L. O. Chua, "Topological criteria for nonlinear resistive circuits containing controlled sources to have a unique solution," *IEEE Trans. Circuit Syst.*, vol. CAS-31, pp. 722 - 741, August 1984.
- [5] D. H. Wolaver, "Basic constraints from graph theory for dc-to-dc conversion networks," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-19, pp. 640 - 648, November 1972.
- [6] R. Tymerski and V. Vorpérian, "Generation, classification and analysis of switched-mode DC-to-DC converters by the use of converter cells," *Proc. of IEEE INELEC*, pp.181-195, 1986.
- [7] J. Chen, D. Maksimović, and R. Erickson, "Buck-boost PWM converters having two independently controlled switches," *Power Electronics Specialists Conference, 2001. PESC. 2001 IEEE 32nd Annual*, vol.2, pp.736-741, 2001.
- [8] T. Nishi, T. Ogishima, and M. Ogata, "Topological conditions on switched mode dc-dc converters," *ITC-CSCC'02*, pp.1129-1132, July 2002.
- [9] M. Ogata and T. Nishi, "Topological criteria for switched mode dc-dc converters," *Proc. of ISCAS2003*, vol.3 pp.184-187, May 2003.
- [10] M. Ogata and T. Nishi, "Topological conditions for 4-switch DC-DC converters," *Proc. 2003 ISEE*, pp.63-66, 2003.
- [11] M. Nakahara, Introduction to SCAT simulation program (in Japanese), Nikkankougyou-Simbun Pub. Co., 2004.

# ANALYSIS OF DC-DC CONVERTERS CONTAINING A TRANSFORMER

Tetsuo NISHI and Masato OGATA

Faculty of Science and Engineering  
Waseda University  
Tokyo, 169-0072 JAPAN

Faculty of Engineering  
Kyushu Sangyo University  
Fukuoka, 813-8503 JAPAN

## ABSTRACT

This paper gives rigorous analysis of a kind of switching converters containing a transformer and shows that some graph-theoretic interpretation for them to work as DC-DC converters is possible.

## 1. INTRODUCTION

Practical importance of dc-dc convertes has been increased and the research in this field is still actively studied from various view points, such as efficiency, power consumption, circuit configuration, etc. The design of a dc-dc converter is necessarily heuristic rather than systematic with a few exceptions.

The authors has published several papers [4][5][6], which give the relation between the output gain and the duty ratio  $d$  and  $d'$ , and show some necessary and sufficient conditions on circuit structure for a circuit to work as booster-, buck-, and buck/booster-type dc-dc converters.

The circuits dealt in [4][5][6] are current-continuous type circuit **without** transformers, while dc-dc converters using transformers are practically very important for the design of floating type dc-dc converters.

In this paper we deal with a dc-dc converter containing a transformer, which is represented by some inductors and an ideal transformer. But the analysis of networks containing ideal transformers is usually cumbersome and systematic analysis is intractable in some sense. This paper gives rigorous analysis based on the averaging method of the state equation for the above circuit and shows that some graph-theoretic conditions for the circuit to work as a dc-dc converter can be obtained. One of the results is to show that the output gain is a bilinear function of  $d$  and  $d'$  (see Eq.(44)). Due to the lack of space we describe only the first step of graph-theoretic interpretation, but we will show the

This research was supported in part by Core Research for Evolutional Science and Technology (CREST), and Japan Science and Technology Agency (JST) and by the Grants-in-Aid for Scientific Research (C) no. 16560339 from the Japanese Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology.

concrete topological conditions for a circuit to work as, for example, a buck/booster type dc-dc converter.

## 2. DERIVATION OF AVERAGED STATE EQUATIONS

### 2.1. Assumptions

The circuit we study in this paper is shown in Fig. 1, where the transformer is assumed to be a 3-winding transformer, because in the case of 2-winding transformer we have no difficulty for analysis. We suppose that the circuit consists of one dc voltage source  $E$ ,  $k$  switches  $S_1, S_2, \dots, S_k$ ,  $m_L$  inductors  $\{L_i\}$ ,  $m_C$  capacitors  $\{C_i\}$  and one output resistor  $R_o$  as well as the transformer. In the first part we assume  $k$  switches but in the latter part we assume one pair of switches.

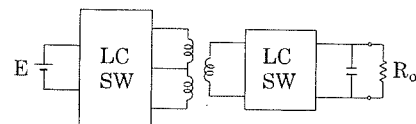


Fig. 1. A circuit considered in this paper

**Assumption 1:** The circuit works in bi-phase.

All switches are classified into two:  $\hat{S} = \{S_1, \dots, S_{k_1}\}$  and  $\hat{\hat{S}} = \{S_{k_1+1}, \dots, S_k\}$ . We assume that in Phase I (resp. Phase II)  $\hat{S}$  are ON and  $\hat{\hat{S}}$  are OFF (resp.,  $\hat{S}$  are OFF and  $\hat{\hat{S}}$  are ON).

**Assumption 2:** There is neither a loop consisting of  $E$  and  $\{C_i\}$  only nor a cutset consisting of  $\{L_i\}$  only.

If an inductor current or a capacitor voltage changes discontinuously, then energy loss necessarily occurs. This inevitably decreases the efficiency of a dc-dc converter. So we assume:

**Assumption 3:** Neither an inductor current nor a capacitor voltage does not change discontinuously.

**Assumption 4:** The output resistor  $R_o$  is connected in parallel with the capacitor  $C_n$ .

Then we have:

**Lemma 1:** There exists no loop consisting of at least one switch of  $\hat{S}$  (or  $\hat{\hat{S}}$ ) and  $E$  and  $\{C_i\}$ .

**Lemma 2:** There exists no cutset consisting of at least one switch of  $\hat{S}$  (or  $\hat{\hat{S}}$ ) and  $\{L_i\}$ .

## 2.2. Graph Representation of a circuit

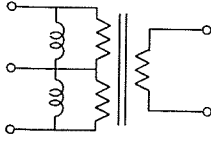


Fig. 2

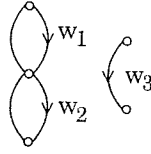


Fig. 3

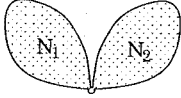


Fig. 4

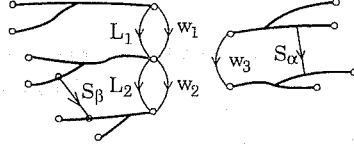


Fig. 5

We can assume that the three-winding transformer is compact. Then it has an equivalent representation as shown in Fig. 2, which consists of inductors  $L_1, L_2$  and a three-winding ideal transformer (IT). Fig. 3 is the graph representation, where  $W_1, W_2$  and  $W_3$  correspond to IT edges. Without loss of generality we assume that the turn ratio of  $W_1, W_2$  and  $W_3$  is  $1 : n : 1$ . Let the voltages and currents of  $W_k (k = 1, 2, 3)$  be  $v_k$  and  $i_k$ . Then we have:

$$v_1 : v_2 : v_3 = 1 : n : 1 \quad (1)$$

$$i_1 + ni_2 + i_3 = 0 \quad (2)$$

Lemmas 1 and 2 imply that  $\hat{S}, E$ , and  $\{C_i\}$  can be tree edges and  $\hat{\hat{S}}, R_o$ , and  $\{L_i\}$  can be cotree edges. About the IT edges  $W_i$  we have:

**Theorem 1:** In both phases two of  $W_i (i = 1, 2, 3)$  are tree edges and the other is a cotree edge.

**Proof)** Note that if there exists a cutset composed of  $W_1$  and  $\{L_i\}$  only, then the current  $i_1$  of  $W_1$  is determined by inductor currents only and similarly if there exists a loop composed of  $W_1, \{C_i\}$  and  $E$  only, then the voltage  $v_1$  of  $W_1$  is determined by capacitor voltages and  $E$  only. Therefore Eqs.(1) and (2) imply that the number of loops consisting of  $W_i (i = 1, 2, 3), E$  and  $\{C_i\}$  only is at most one (resp., the number of cutsets consisting of  $W_i$  and  $\{L_i\}$  only is at most two) in general.

Suppose that two of  $W_i (i = 1, 2, 3)$  are cotree edges. This means that there are two loops consisting of  $W_i$  and  $\{L_i\}$ , which leads contradiction. It therefore follows that at most one of  $W_i$  is a cotree edge. Similarly we can show that all  $W_i (i = 1, 2, 3)$  cannot be tree edges. This completes the proof of Theorem 1.

We can assume without loss of generality that:

**Assumption 5:** In Phase I  $W_1$  and  $W_2$  are tree edges and  $W_3$  is a cotree edge, and in Phase II  $W_1$  and  $W_3$  are tree edges and  $W_2$  is a cotree edge.

By using Assumption 5 we can show that:

**Lemma 3:** The number of switches are even and

$$\|\hat{S}\| = \|\hat{\hat{S}}\|, \text{ i.e., } k_1 = k/2 \quad (3)$$

**Lemma 4:** The difference of the number of ON switches and OFF switches are at most one in the sub-graph  $N_1$  (See Fig. 4) in both phases.

Proof of Lemmas 3 and 4 is omitted. Eq.(3) is the same as in the case of circuits without a transformer.

In the subsequent we assume for simplicity that:

**Assumption 6:** The number of switches is two.

**Assumption 7:** Let these two switches be  $S_\alpha$  and  $S_\beta$  and let  $S_\alpha$  (resp.  $S_\beta$ ) is ON (resp. OFF) in Phase I and OFF (resp. ON) in Phase II.

We can verify that in order to satisfy Assumption 5  $S_\alpha$  and  $S_\beta$  should be put as shown in Fig. 5.

## 2.3. Analysis in Phase I

Considering Assumptions 5 and 7, let  $T$  of  $G$  be  $T = \{C, E, W_1, W_2, S_\alpha\}$ . Then the fundamental cutset matrix  $C_f$  is given as follows:

$$C_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} C & E & W_1 & W_2 & S_\alpha & W_3 & S_\beta & L & R_o \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ E \\ W_1 \\ W_2 \\ S_\alpha \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4)$$

where the blank means "0". From Fig. 5 and Assumption 5 we see that:

$$C_{cr}^T = [0, 0, \dots, 0, 1] \quad (5)$$

$$C_{\alpha r} = C_{er} = C_{1r} = C_{2r} = 0 \quad (6)$$

$$C_{e3} = 0, C_{13} = 0, C_{23} = 0, C_{\alpha\beta} = 0 \quad (7)$$

$$C_{1\beta} = 0, C_{2\beta} = 1, C_{\alpha3} = 1 \quad (8)$$

where the superscript  $T$  denotes the transpose of a matrix. Rewriting Eq.(4) by using Eq.(5)–(8), we have:

$$C_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} C & E & W_1 & W_2 & S_\alpha & W_3 & S_\beta & L & R_o \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ E \\ W_1 \\ W_2 \\ S_\alpha \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9)$$

Then the fundamental loop matrix  $B_f$  is given as:

$$B_f = [ -C_{fp}^T, U ] \quad (10)$$

where  $C_{fp}$  is the principal part of  $C_f$  and  $U$  denotes the unit matrix of appropriate order. Let the voltage vector  $v$  and the current vector  $i$  can be written by referring to Eq.(9) as follows:

$$\begin{aligned} v &= [ v_c^T \ v_e^T \ v_1^T \ v_2^T \ v_\alpha^T \ v_3^T \ v_\beta^T \ v_l^T \ v_r^T ]^T \\ i &= [ i_c^T \ i_e^T \ i_1^T \ i_2^T \ i_\alpha^T \ i_3^T \ i_\beta^T \ i_l^T \ i_r^T ]^T \end{aligned} \quad (11)$$

Then the circuit equation in Phase I is given as in Eqs.(12)–(17).

$$\text{KCL: } C_f i = 0 \quad (12)$$

$$\text{KVL: } B_f v = 0 \quad (13)$$

Characteristics of circuit elements:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}, \quad v_l = L \frac{di_l}{dt} v_l \quad (14)$$

$$v_\alpha = 0, \quad i_\beta = 0 \quad (15)$$

$$v_e = E, \quad v_r = R_o i_r \quad (16)$$

$$\text{IT: } \begin{cases} v_1 : v_2 : v_3 = 1 : n : 1 \\ i_1 + ni_2 + i_3 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

First we consider KCL in Eq.(12). Considering  $i_\beta = 0$  by (15), we have KCL as:

$$\begin{matrix} C \\ E \\ W_1 \\ W_2 \\ S_\alpha \end{matrix} \begin{bmatrix} C & E & W_1 & W_2 & S_\alpha & W_3 & L & R_o \\ 1 & & & & C_{c3} & C_{cl} & C_{cr} & \\ & 1 & & & 0 & C_{el} & 0 & \\ & & 1 & & 0 & C_{1l} & 0 & \\ & & & 1 & 0 & C_{2l} & 0 & \\ & & & & 1 & C_{\alpha l} & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \\ i_e \\ i_1 \\ i_2 \\ i_\alpha \\ i_l \\ i_r \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

Since Eq.(17) holds, we substitute  $i_3 = -(i_1 + ni_2)$  into Eq.(18) and rearrange the variables. Then Column  $W_1$  (resp.,  $W_2$ ) in Eq.(18) changes into (Column  $W_1$ –Column  $W_3$ ) (resp., (Column  $W_2$ – $n \times$  Column  $W_3$ )), i.e.,

$$\begin{bmatrix} -C_{c3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -nC_{c3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -n \end{bmatrix}, \quad (19)$$

respectively. So Eq.(18) changes as:

$$\begin{matrix} C \\ E \\ W_1 \\ W_2 \\ S_\alpha \end{matrix} \begin{bmatrix} C & E & W_1 & W_2 & S_\alpha & L & R_o \\ 1 & & -C_{c3} & -nC_{c3} & C_{cl} & C_{cr} & \\ & 1 & 0 & 0 & C_{el} & 0 & \\ & & 1 & 0 & C_{1l} & 0 & \\ & & 0 & 1 & C_{2l} & 0 & \\ & & -1 & -n & C_{\alpha l} & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \\ i_e \\ i_1 \\ i_2 \\ i_\alpha \\ i_l \\ i_r \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

Since the 2nd and the 5th equations of Eq.(20) determine  $i_e$  and  $i_\alpha$ , we can delete these two equations from Eq.(20). Then we have:

$$\begin{matrix} C \\ W_1 \\ W_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} C & W_1 & W_2 & L & R_o \\ 1 & -C_{c3} & -nC_{c3} & C_{cl} & C_{cr} \\ & 1 & 0 & C_{1l} & 0 \\ & 0 & 1 & C_{2l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \\ i_1 \\ i_2 \\ i_l \\ i_r \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

from which by using Eq.(14) we obtain a half of the state equations as follows:

$$C \frac{dv_c}{dt} = -\{C_{cl} + [C_{c3}, \quad nC_{c3}] \begin{bmatrix} C_{1l} \\ C_{2l} \end{bmatrix}\} i_l - C_{cr} i_r \quad (22)$$

$$i_r = \frac{1}{R_o} v_r, \quad v_c = C_{cr}^T v_c \quad (23)$$

Carrying out similar but tedious calculation for KVL, we have other half of state equations from KVL. We write only the final equation as follows:

$$L \frac{di_l}{dt} = \{C_{cl}^T - [C_{1l}^T + nC_{2l}^T, \quad 0]\} \begin{bmatrix} C_{1l}^T \\ C_{2l}^T \end{bmatrix} v_c + C_{cl}^T E \quad (24)$$

Summarizing Eqs.(22)–(24), we have the following state equation in Phase I:

$$\begin{bmatrix} L \frac{di_l}{dt} \\ C \frac{dv_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H^T \\ -H & -\frac{1}{R_o} C_{cr} C_{cr}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_l \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{cl}^T \\ 0 \end{bmatrix} E \quad (25)$$

$$H = C_{cl} + C_{c3}(C_{1l} + nC_{2l}) \quad (26)$$

## 2.4. Analysis in Phase II

Considering Assumptions 5 and 7, we choose a tree  $T' = \{C, E, W_1, W_3, S_\beta\}$  in Phase II. Then the fundamental cutset matrix  $C'_f$  is obtained as follows (see Eqs. (5)–(8)):

$$C'_f = \begin{matrix} C & E & W_1 & W_2 & S_\alpha & W_3 & S_\beta & L & R_o \\ \begin{matrix} C \\ E \\ W_1 \\ W_3 \\ S_\beta \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & C'_{c2} & C'_{c\alpha} & & C'_{cl} & C'_{cr} \\ & 1 & C'_{e2} & 0 & & C'_{el} & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & C'_{1l} & 0 \\ & & & 0 & 1 & C'_{3l} & 0 \\ & & & 1 & 0 & C'_{\beta l} & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

The relation between  $C_f$  and  $C'_f$  is given as follows:

$$\begin{aligned} C'_{c2} &= -C_{c\beta}, \quad C'_{c\alpha} = -C_{c3} \\ C'_{cl} &= C_{cl} - [C_{c3}, \quad C_{c\alpha}] \begin{bmatrix} C_{\alpha l} \\ C_{2l} \end{bmatrix} \\ C'_{e2} &= -C_{e\beta}, \quad C'_{1l} = C_{1l} \\ C'_{el} &= C_{el} - C_{c\beta} C_{2l} \\ C'_{3l} &= C_{\alpha l}, \quad C'_{\beta l} = C_{2l} \end{aligned} \quad (28)$$

Carrying out similar but combersome calculation, we have the state equation in Phase II as follows:

$$\begin{bmatrix} L \frac{di_l}{dt} \\ C \frac{dv_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H'^T \\ -H' & -\frac{1}{R_o} C_{cr} C_{cr}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_l \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C'_{cl} \\ 0 \end{bmatrix} E \quad (29)$$

$$H' = C_{cl} - [C_{c3}, \quad C_{c\beta}] \begin{bmatrix} C_{\alpha l} \\ C_{2l} \end{bmatrix} - \frac{1}{n} C_{c\beta} [C_{1l} + C_{\alpha l}] \quad (30)$$

$$C'_{\alpha l} = C_{cl} - C_{c\beta} (C_{2l} + \frac{1}{n} C_{1l} + \frac{1}{n} C_{\alpha l}) \quad (31)$$

From Eqs.(27) and (31) we have:

$$H - H' = (C_{c3} + \frac{1}{n} C_{c\beta})(C_{1l} + nC_{2l} + C_{\alpha l}) \quad (32)$$

from which we have an important property:

**Theorem 2:** The rank of  $H - H'$  is one.

## 2.5. Averaged state equation

Eqs.(27) and (31) are compactly rewritten as:

$$K\dot{x} = Ax + b \quad (\text{in Phase I}) \quad (33)$$

$$K\dot{x} = A'x + b' \quad (\text{in Phase II}) \quad (34)$$

$$K = L + C = \text{diag}[L_1, \dots, L_m, C_1, \dots, C_n] \quad (35)$$

where  $A$  and  $A'$  (resp.,  $b$  and  $b'$ ) are coefficient matrices (resp., vectors) in the right-hand sides of Eqs.(25) and (29).

Let the duty ratio be  $d$  and  $d'$  satisfying

$$1 \geq d \geq 0, \quad 1 \geq d' \geq 0, \quad d + d' = 1 \quad (36)$$

Then we have the averaged state equations as:

$$K \frac{dx}{dt} = \bar{A}x + \bar{b} \quad (37)$$

$$\bar{A} = dA + d'A' \\ = \begin{bmatrix} 0 & (dH + d'H')^T \\ -(dH + d'H') & -\frac{1}{R_o} (dC_{cr}C_{cr}^T + d'C_{cr}'C_{cr}'^T) \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\bar{b} = db + d'b' \\ = - \begin{bmatrix} dC_{cl}^T + d'C_{cl}'^T \\ 0 \end{bmatrix} E \left( E = \begin{bmatrix} b_e \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (39)$$

$$\bar{H} = dH + d'H' \quad (40)$$

## 2.6. Steady state solution

The output voltage  $v_{out}$  is obtained by solving

$$\bar{A}x + \bar{b} = 0 \quad (41)$$

for  $x_{m_L+m_C}$  (= the last element of  $x$ ). We can show that  $m_L = m_C$  for  $|\bar{A}| \neq 0$ . This means that the number of inductors is equal to that of capacitors.

Then  $v_{out}$  can be obtained by Cramer formula as follows:

$$v_{out} = \left| \begin{bmatrix} 0 & \overline{H^T} & b_e \\ -H & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| / |\bar{A}| \quad (42)$$

$$= \frac{|\overline{H^T} \quad b_e|}{|\bar{H}|} \quad (43)$$

where  $\overline{H^T}$  is the matrix obtained from  $\overline{H^T}$  by deleting the last column.

It follows by Theorem 2 that the output  $v_{out}$  can be represented as:

$$v_{out} = \frac{d\delta + d'\delta'}{d\gamma + d'\gamma'} \quad (44)$$

$$\gamma = |H^T|, \quad \gamma' = |\overline{H'^T}| \quad (45)$$

$$\delta = |\overline{H^T} b_e|, \quad \delta' = |\overline{H'^T} b_e| \quad (46)$$

## 3. GRAPH-THEORETIC INTERPRETATION

Eqs.(45) and (46) can be rewritten as follows:

$$\gamma = |H| = |C_{cl} + C_{c3}(C_{1l} + nC_{2l})| \\ = \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} \\ C_{1l} + nC_{2l} & -1 \end{vmatrix} \quad (47)$$

$$= \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} \\ C_{1l} & 0 \end{vmatrix} \quad (48)$$

$$+ \begin{vmatrix} C_{cl} & C_{c3} \\ nC_{2l} & 0 \end{vmatrix} \quad (49)$$

Similar expression is possible for  $\gamma'$ ,  $\delta$ , and  $\delta'$ . These factors in Eqs.(47)–(49) are minors of the fundamental cutset matrix  $C_f$  in Eq.(9) and therefore have the graph-theoretic interpretation [4][5][6]. If, for example, we want to obtain buck/boost converter with the output  $v_{out} = (d'/d)E$ , we have to derive the condition  $\gamma \neq 0$ ,  $\delta' \neq 0$ , and  $\gamma' = \delta = 0$ . Topological conditions for several types of dc-dc converters, and concrete examples will be presented at the conference.

## 4. CONCLUSION

We show the rigorous analysis of a kind of dc-dc converters by means of the averaging method. Based on the analysis we can derive the topological conditions on these circuits. We can generalize the results into the case of two pairs of switches.

## 5. REFERENCES

- [1] K. Harada, et al, "Fundamentals on Switching converters", Corona-sha, 1992
- [2] Marian K. Kazimierzczuk, "Dynamic Performance of PWM DC-DC Boost Converter with Input Voltage Feedforward Control", IEEE Trans. Circuit Syst., Vol.46, NO.12 pp.1473-1481 Dec 1999.
- [3] Dariusz Czarkowski and Marian K. Kazimierzczuk, "Linear Circuit Models of PWM Flyback and Buck/Boost Converters", IEEE Trans. Circuit Syst., Vol.39, NO.8 pp.688-693, Aug 1992
- [4] T. Nishi, T. Ogishima, and M. Ogata, "Topological conditions on switched mode dc-dc converters," Proc. of ITC-CSCC'02,
- [5] M. Ogata and T. Nishi, "Topological criteria for switched mode dc-dc converters," Proc. of ISCAS2003
- [6] M. Ogata and T. Nishi, "Graph-Theoretic Approach to the Design of Four-Switch DC-DC Converters," Proc. of ISCAS2005
- [7] T. Nishi, et al, "A consideration on the circuit structure of switching source IEICE Tech. Rept.2003.

# Necessary and Sufficient Condition for a Class of Planar Dynamical Systems Related to CNNs to be Completely Stable

Norikazu Takahashi, *Member, IEEE*, and Tetsuo Nishi, *Fellow, IEEE*

**Abstract**—We study global dynamical behavior of cellular neural networks (CNNs) consisting of two cells. Since the output characteristic of each cell is expressed by a piecewise-linear function, a CNN with two cells is considered as a planar piecewise-linear dynamical system. We present the necessary and sufficient condition for such a CNN to be completely stable under the assumptions that: 1) self-coupling coefficients take the same value greater than one and 2) biases are set to zero. The condition is explicitly expressed in terms of coupling coefficients between cells.

**Index Terms**—Cellular neural networks (CNNs), complete stability, planar dynamical systems.

## I. INTRODUCTION

IN THE PAST two decades, considerable efforts have been devoted to stability analysis of dynamical systems related to recurrent neural networks [1]–[9]. The dynamical behavior of a neural network may be convergent, oscillatory, or even chaotic depending on the values of network parameters such as coupling coefficients between neurons. In many applications of neural networks, it is often required that a neural network is *completely stable*, that is, every trajectory converges to one of the equilibrium points [10]–[12]. Thus, it is important from both theoretical and practical points of view to clarify the relationship between the parameters and the complete stability.

In this brief, we study the complete stability of cellular neural networks (CNNs) [13]. A CNN is an analog nonlinear circuit consisting of many signal processing units called cells. The state equation of a CNN with  $n$  cells is described by the set of differential equations

$$\dot{x}_i = -x_i + \sum_{j \in N_i} a_{ij}y_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

where  $x_i$  represents the state of the  $i$ th cell,  $y_i$  represents the output of the  $i$ th cell which depends on  $x_i$  through

$$y_i = f(x_i) \triangleq \frac{1}{2}(|x_i + 1| - |x_i - 1|) \quad (2)$$

Manuscript received November 19, 2003; revised November 15, 2004, and March 7, 2006. This work was supported in part by the 21st Century Center of Excellence (COE) Program "Reconstruction of Social Infrastructure Related to Information Science and Electrical Engineering." This paper was recommended by Editor-in-Chief G. Setti.

N. Takahashi is with the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University, Fukuoka 812-8581, Japan (e-mail: nrikazu@csce.kyushu-u.ac.jp).

T. Nishi is with the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University, Fukuoka 812-8581, Japan. He is now with the Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Tokyo 169-8555, Japan.

Digital Object Identifier 10.1109/TCSII.2006.876466

and  $a_{ij}$  represents the coefficient of the coupling from the  $j$ th cell to the  $i$ th cell,  $b_i$  is the bias for the  $i$ th cell, and  $N_i$  is the set of integers  $k$  such that the  $k$ th cell belongs to the neighborhood of the  $i$ th cell. Since each cell is coupled only with neighboring cells, CNNs are suitable for VLSI implementation. Moreover, due to their rich dynamical behavior, CNNs have found many applications mainly in the field of image processing [14], [15]. As well as other neural network models, it is often required that a CNN is completely stable because the outputs in the steady state are regarded as the result of image processing carried out by the CNN. Many results on the complete stability of CNNs can be found in the literature [16]–[25], but the relationship between the complete stability and the network parameters  $a_{ij}$  and  $b_i$  has not been clarified yet, even for the simplest case where the CNN consists of only two cells.

The first study of the global dynamical behavior of CNNs consisting of two cells was made by Civalleri and Gilli [18]. They considered CNNs described by

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + a_{11}f(x_1) + a_{12}f(x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + a_{21}f(x_1) + a_{22}f(x_2) \end{cases} \quad (3)$$

and presented detailed analytical results concerning the location of equilibrium points, the domain of attraction of each equilibrium point, and the complete stability under the assumption that both  $a_{11}$  and  $a_{22}$  are greater than one. Although most of their results are correct and valuable, it has recently been pointed out that the complete stability analysis for the case where  $a_{12}a_{21} < 0$  is not correct [26].

The purpose of this brief is to clarify the complete stability of the planar dynamical system (3) under the assumption that

$$a_{11} = a_{22} > 1 \quad \text{and} \quad a_{12}a_{21} < 0. \quad (4)$$

It is usually assumed for various CNN models that couplings between cells are space invariant [15]. The first condition in (4) corresponds to this assumption. Exploring the properties of the phase portrait of the system in detail, we will derive the necessary and sufficient condition for (3) satisfying (4) to be completely stable. Since the case where  $a_{12}a_{21} \geq 0$  has already been solved by Civalleri and Gilli [18], the results of this brief complete the complete stability analysis for (3) with  $a_{11} = a_{22} > 1$ .

The technique used for the stability analysis in this brief is restricted to two-cell CNNs and cannot be directly applied to more general CNNs. However, the results themselves are important for the following two reasons. First, stability analysis of a two-cell CNN plays an important role for that of an  $n$ -cell CNN in some cases (for example, see [27, Th. 4], [28, Th. 4]).

Second, since the system (3) satisfying (4) is a special case of CNNs with the opposite-sign template, the results given in this brief can be regarded as a fundamental work for the complete stability analysis of such CNNs. In particular, if we try to derive a condition for a CNN with the opposite-sign template to be completely stable independent of the number of cells, it suffices for us to consider only parameter values satisfying the complete stability condition given in this brief.

## II. MAIN RESULTS

Let us consider the dynamical system (3) under the assumption (4). Since we can assume without loss of generality that  $0 < a_{12} \leq -a_{21}$ , the system can be expressed in terms of three parameters  $p$ ,  $r$ , and  $s$  as follows:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + pf(x_1) + sf(x_2), \\ \dot{x}_2 = -x_2 - rf(x_1) + pf(x_2), \end{cases} \quad p > 1, r \geq s > 0 \quad (5)$$

where  $f(\cdot)$  is a piecewise-linear function defined by (2). In the following, we denote the solution of the system (5) passing through a point  $P \in \mathbb{R}^2$  at  $t = 0$  by  $\psi(t, P) = (\psi_1(t, P), \psi_2(t, P))$ . The system (5) is said to be completely stable if for any  $P$  the solution  $\psi(t, P)$  converges to some equilibrium point as  $t$  goes to infinity.

For the system (5), we define the function  $g(\sqrt{rs}, p)$  as

$$g(\sqrt{rs}, p) \triangleq \exp\left(\frac{2(p-1)}{\sqrt{rs}} \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{rs}}\right)\right) - \frac{rs}{(p-1)^2(p^2 + rs)} \quad (6)$$

where  $\arctan(\cdot)$  takes its principal value, that is,  $-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$  for all  $x \in \mathbb{R}$ . This function plays an important role in our stability analysis.

The following theorem is the main result of this brief.

**Theorem 1:** The system (5) is completely stable if and only if  $p - 1 \geq s$  and  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$  hold simultaneously.

The second condition specifies the relationship between the self-coupling coefficient  $p$  and the geometric average of mutual coupling coefficients  $r$  and  $s$ . By solving the equation  $g(\sqrt{rs}, p) = 0$  for  $p$  numerically for each value of  $\sqrt{rs}$ , we can draw the curve  $g(\sqrt{rs}, p) = 0$ , as shown in Fig. 1. The  $\sqrt{rs}$ - $p$  space is divided into two regions by the curve  $g(\sqrt{rs}, p) = 0$ ; the system (5) is completely stable for the upper region but not for the lower one including the curve  $g(\sqrt{rs}, p) = 0$ . Note that, for any fixed value of  $\sqrt{rs}$ , the equation  $g(\sqrt{rs}, p) = 0$  has a unique solution since  $g(\sqrt{rs}, p)$  is monotone increasing in  $p$ . Also, it is easily seen that the value of  $p$  satisfying  $g(\sqrt{rs}, p) = 0$  is monotone increasing in  $\sqrt{rs}$ , and less than two for any value of  $\sqrt{rs}$ . We thus can derive a much simpler complete stability condition from Theorem 1 as follows.

**Corollary 1:** The system (5) is completely stable if  $p - 1 \geq s$  and  $p \geq 2$  hold simultaneously.

By combining Theorem 1 with the results given in [18], we have the following theorem.

**Theorem 2:** Under the assumption that  $a_{11} = a_{22} > 1$ , the system (3) is completely stable if and only if one of the following two conditions holds.

- 1)  $a_{12}a_{21} \geq 0$ .
- 2)  $a_{12}a_{21} < 0$ ,  $a_{11} - 1 \geq \min\{|a_{12}|, |a_{21}|\}$ , and  $g(\sqrt{-a_{12}a_{21}}, a_{11}) > 0$

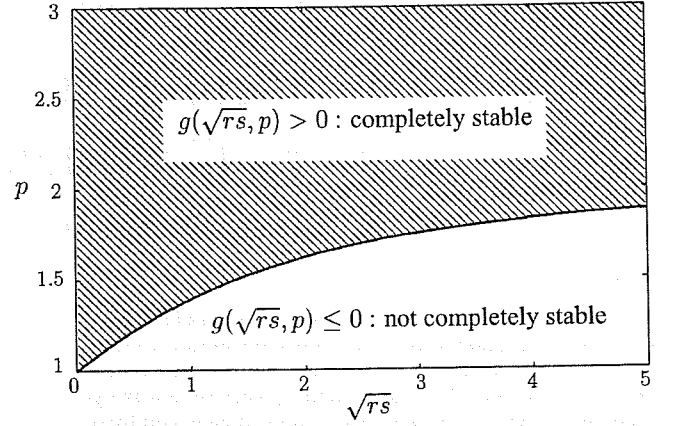


Fig. 1. Parameter region for  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$ .

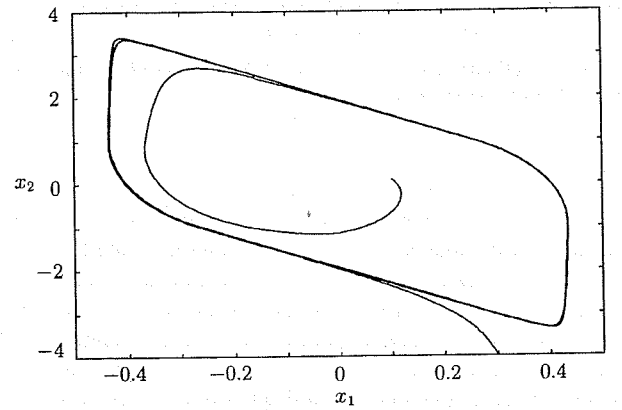


Fig. 2. Two trajectories starting at  $(0.1, 0.1)$  and  $(0.3, -4.0)$  for the CNN considered in Example 1.

In order to show validity of the main result of this brief, we now give two illustrative examples.

**Example 1:** Let us consider a two-cell CNN with the parameters given by  $a_{11} = a_{22} = 1.36$ ,  $a_{12} = 0.16$ , and  $a_{21} = -5.0$ . For these parameter values, we have  $g(\sqrt{-a_{12}a_{21}}, a_{11}) = g(\sqrt{0.8}, 1.36) \simeq -0.113 < 0$ . Hence, it follows from Theorem 2 that this CNN is not completely stable. This is verified by solving the state equation numerically for some appropriate initial conditions. In fact, as shown in Fig. 2, two trajectories starting at  $(0.1, 0.1)$  and  $(0.3, -4.0)$  converge to the same limit cycle.

**Example 2:** Let us increase the self-coupling coefficients of the CNN in Example 1 from 1.36 to 1.37. In this case, we have  $g(\sqrt{-a_{12}a_{21}}, a_{11}) = g(\sqrt{0.8}, 1.37) \simeq 0.090 > 0$ . Thus, it follows from Theorem 2 that this CNN is completely stable. In fact, as shown in Fig. 3, two trajectories starting at the same points as Example 1, i.e.,  $(0.1, 0.1)$  and  $(0.3, -4.0)$ , converge to two distinct equilibrium points at  $(1.21, -6.37)$  and  $(-1.21, 6.37)$ .

## III. PROOF OF THEOREM 1

We first show some known results on the complete stability of the system (5).

**Lemma 1:** If the system (5) satisfies  $p - 1 < s$ , then it is not completely stable.

*Proof:* See [18]. ■

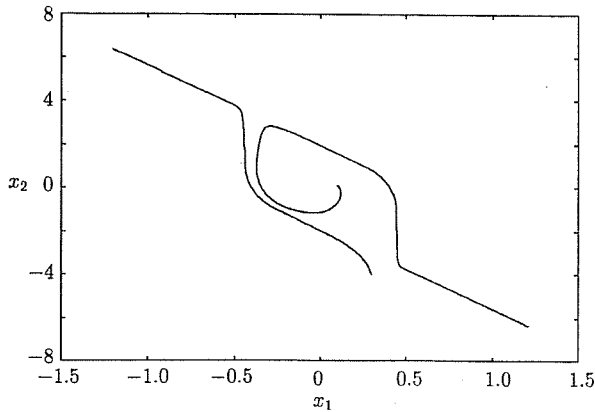


Fig. 3. Two trajectories starting at  $(0.1, 0.1)$  and  $(0.3, -4.0)$  for the CNN considered in Example 2.

**Lemma 2:** If the system (5) satisfies  $p - 1 \geq \sqrt{rs}$ , then it is completely stable.

*Proof:* See [26]. ■

From these two lemmas, we can hereafter concentrate our attention on the case where

$$s \leq p - 1 < \sqrt{rs}. \quad (7)$$

Note that this condition implies  $r > s$ .

The phase portrait of the system (5) with (7) is shown in Fig. 4 where nullclines, equilibrium points, and directions of the flow at some points are drawn. Let

$$\mathcal{R}^{(i,j)} \triangleq \{(x_1, x_2) | x_1 \in J^{(i)}, x_2 \in J^{(j)}\}, \quad i, j \in \{-, 0, +\}$$

the nine regions in the state space of the system (5), where  $J^{(-)} = (-\infty, -1)$ ,  $J^{(0)} = [-1, 1]$  and  $J^{(+)} = (1, \infty)$ . If  $s < p - 1$ , there are five equilibrium points  $O$ ,  $E^{(0,+)} = (-s/(p-1), p + rs/(p-1))$ ,  $E^{(-,+)} = (-p + s, p + r)$ ,  $E^{(0,-)} = (s/(p-1), -p - rs/(p-1))$ , and  $E^{(+,-)} = (p - s, -p - r)$ , where  $O$  is an unstable focus,  $E^{(0,+)}$  and  $E^{(0,-)}$  are saddle points, and  $E^{(-,+)}$  and  $E^{(+,-)}$  are stable nodes. If  $p - 1 = s$ , on the other hand, there are only three equilibrium points  $O$ ,  $E^{(0,+)}$ , and  $E^{(0,-)}$ . In this case,  $E^{(0,+)}$  and  $E^{(0,-)}$  are unstable but they are not saddle points. Our breaking points of the nullclines on the boundary of  $R^{(0,0)}$  are expressed by  $A = (-s/(p-1), 1)$ ,  $B = ((p-1)/r, 1)$ ,  $C = (s/(p-1), -1)$ , and  $D = (-(p-1)/r, -1)$ .

It is easily seen from Fig. 4 that, for any  $P \in \mathbb{R}^2$ , if the trajectory  $\psi(t, P)$  once satisfies  $|\psi_1(t, P)| > s/(p-1)$ , it necessarily converges to one of the equilibrium points. Thus, the system (5) satisfying (7) is not completely stable if and only if there exists a trajectory which stays in the region  $\{(x_1, x_2) | |x_1| \leq s/(p-1)\}$  and never converges.

In the previous work [26], the authors investigated the behavior of the unstable manifold of  $E^{(0,+)}$  and showed that it touches the line segment  $OC$  if and only if  $g(\sqrt{rs}, p) \leq 0$ . In particular, it passes through the point  $C$ , which implies that there exists a heteroclinic orbit connecting  $E^{(0,+)}$  and  $E^{(0,-)}$ , if and only if  $g(\sqrt{rs}, p) = 0$ . From these results and the Poincaré–Bendixon theorem, the following lemma is derived.

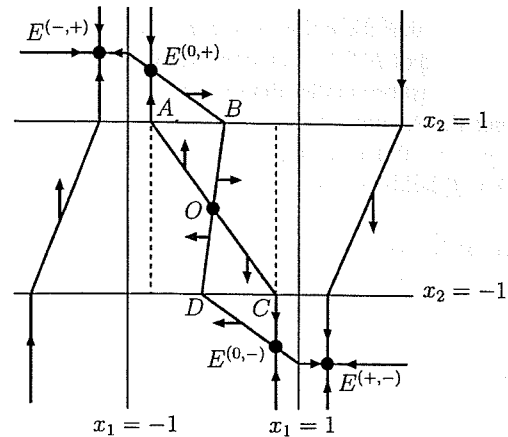


Fig. 4. Phase portrait of the system (5) with (7).

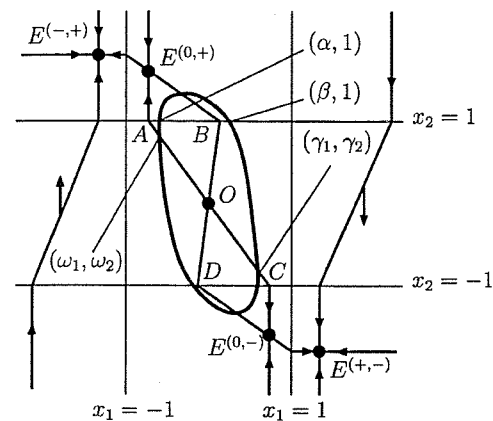


Fig. 5. Possible limit cycle.

**Lemma 3:** If the system (5) satisfies (7) and  $g(\sqrt{rs}, p) \leq 0$ , then it is not completely stable.

*Proof:* See [26]. ■

According to Lemmas 1–3, the final step to prove Theorem 1 is to show that the system (5) is completely stable if (7) and  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$  hold. Since the heteroclinic orbit connecting  $E^{(0,+)}$  and  $E^{(0,-)}$  does not exist in this case, it suffices for us to show that the system (5) satisfying (7) and  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$  does not have a limit cycle passing through the line segments  $OA$ ,  $AB$ ,  $E^{(0,+)}B$ ,  $OC$ ,  $CD$ ,  $E^{(0,-)}D$ , and  $OD$  consecutively (see Fig. 5). The proof will be done by contradiction, that is, we first assume there exists such a limit cycle and then show that this leads to a contradiction. Let  $(\alpha, 1)$  and  $(\beta, 1)$  be the intersections of the limit cycle with the line segment  $AB$  and the line segment connecting  $B$  and  $(1, 1)$ , respectively. Then,  $\alpha$  and  $\beta$  satisfy  $-s/(p-1) < \alpha < (p-1)/r < \beta$ . In addition, the following four lemmas hold.

**Lemma 4:** Assume that the system (5) satisfying (7) and  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$  has a limit cycle shown in Fig. 5. Then,  $\beta < s + p(p-1)/r$ .

*Proof:* Suppose first that  $s + p(p-1)/r > 1$ . Then,  $\beta < s + p(p-1)/r$  apparently holds because  $\beta$  must be at least smaller than 1 in order for  $\psi(t, (\beta, 1))$  to cross the line segment  $OC$ . Suppose next that  $s + p(p-1)/r \leq 1$ . In this case, it was



shown in [26] that the point  $(s + p(p-1)/r, 1)$  is on the unstable manifold of  $E^{(0,+)}$ . Since two different trajectories never intersect,  $\beta$  must be smaller than  $s + p(p-1)/r$ . ■

**Lemma 5:** Assume that the system (5) satisfying (7) and  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$  has a limit cycle shown in Fig. 5. Then,  $h(\alpha, \beta) = 0$  holds where

$$h(\alpha, \beta) \triangleq \left( \alpha + \frac{s}{p-1} \right) \left\{ s + \frac{p(p-1)}{r} - \alpha \right\}^{p-1} - \left( \beta + \frac{s}{p-1} \right) \left\{ s + \frac{p(p-1)}{r} - \beta \right\}^{p-1}. \quad (8)$$

**Proof:** Let  $t_1$  be the smallest positive value of  $t$  for which  $\psi(t, (\alpha, 1))$  is on the line segment  $BE^{(0,+)}$ . By solving the differential equation (5) for the region  $R^{(0,+)}$  with the initial condition  $(x_1(0), x_2(0)) = (\alpha, 1)$ , we derive the explicit formula for the trajectory  $\psi(t, (\alpha, 1))$  ( $0 \leq t \leq t_1$ ) as follows:

$$\begin{aligned} \psi_1(t, (\alpha, 1)) &= \left( \alpha + \frac{s}{p-1} \right) e^{(p-1)t} - \frac{s}{p-1} \\ \psi_2(t, (\alpha, 1)) &= \frac{r}{p} \left\{ \alpha - s - \frac{p(p-1)}{r} \right\} e^{-t} \\ &\quad - \frac{r}{p} \left( \alpha + \frac{s}{p-1} \right) e^{(p-1)t} + p + \frac{rs}{p-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Since  $\psi_2(t, (\alpha, 1))$  vanishes at  $t = t_1$ , we have

$$t_1 = \frac{1}{p} \log \left( \frac{s + \frac{p(p-1)}{r} - \alpha}{\alpha(p-1) + s} \right).$$

Thus,  $\psi_1(t_1, (\alpha, 1))$  is expressed in terms of  $\alpha$  as

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1, (\alpha, 1)) &= \left( \alpha + \frac{s}{p-1} \right) \left\{ \frac{s + \frac{p(p-1)}{r} - \alpha}{(p-1)\alpha + s} \right\}^{(p-1)/p} - \frac{s}{p-1}. \end{aligned}$$

Next, let  $t_2$  be the largest negative value of  $t$  for which  $\psi(t, (\beta, 1))$  is on the line segment  $BE^{(0,+)}$ . Then, in a similar way as above, we can express  $\psi_1(t_2, (\beta, 1))$  in terms of  $\beta$  as

$$\psi_1(t_2, (\beta, 1)) = \left( \beta + \frac{s}{p-1} \right) \left\{ \frac{s + \frac{p(p-1)}{r} - \beta}{(p-1)\beta + s} \right\}^{(p-1)/p} - \frac{s}{p-1}.$$

Since  $\psi_1(t_1, (\alpha, 1)) = \psi_1(t_2, (\beta, 1))$ , we have  $h(\alpha, \beta) = 0$ . ■

**Lemma 6:** Assume that the system (5) satisfying (7) and  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$  has a limit cycle shown in Fig. 5. If  $p \geq 2$ , then  $\beta^2 > \alpha^2$  holds.

**Proof:** Let  $l_1(u, v) \triangleq v^2 - u^2$ . We shall show that  $l_1(u, v)$  is positive for all  $u$  and  $v$  satisfying

$$-\frac{s}{p-1} < u < \frac{p-1}{r} < v < s + \frac{p(p-1)}{r} \quad (10)$$

and  $h(u, v) = 0$ . Note that  $l_1(u, v)$  is intrinsically a function of  $u$  only because  $v$  is defined by  $u$  implicitly through  $h(u, v) = 0$ . Since  $v \rightarrow s + p(p-1)/r$  as  $u \rightarrow -s/(p-1)$ , we have

$$\lim_{u \rightarrow -s/(p-1)} l_1(u, v) = \left\{ s + \frac{p(p-1)}{r} \right\}^2 - \left( -\frac{s}{p-1} \right)^2 > 0. \quad (11)$$

Also, since  $v \rightarrow (p-1)/r$  as  $u \rightarrow (p-1)/r$ , we have

$$\lim_{u \rightarrow (p-1)/r} l_1(u, v) = 0. \quad (12)$$

Making use of the implicit function theorem and the assumption  $p \geq 2$ , we have

$$\begin{aligned} \frac{dl_1(u, v)}{du} &= 2v \cdot \frac{dv}{du} - 2u \\ &= 2v \cdot \left( -\frac{\partial h / \partial u}{\partial h / \partial v} \right) - 2u \\ &= -2v \cdot \frac{\left( \frac{p-1}{r} - u \right) \left\{ -u + s + \frac{p(p-1)}{r} \right\}^{p-2}}{\left( v - \frac{p-1}{r} \right) \left\{ -v + s + \frac{p(p-1)}{r} \right\}^{p-2}} - 2u \\ &\leq -2v \cdot \frac{\frac{p-1}{r} - u}{v - \frac{p-1}{r}} - 2u \\ &= -\frac{2(p-1)}{r} \cdot \frac{v - u}{v - \frac{p-1}{r}} \\ &< 0. \end{aligned} \quad (13)$$

From (11)–(13), we can conclude that  $l_1(u, v) > 0$  for all  $u$  and  $v$  satisfying (10) and  $h(u, v) = 0$  if  $p \geq 2$ . ■

**Lemma 7:** Assume that the system (5) satisfying (7) and  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$  has a limit cycle shown in Fig. 5. If  $p < 2$ , then  $\beta \geq (p-1)(p/r - \alpha)$  holds.

**Proof:** Let  $l_2(u, v) \triangleq v - (p-1)(p/r - u)$ . We shall show in the following that  $l_2(u, v)$  is nonnegative for all  $u$  and  $v$  satisfying (10) and  $h(u, v) = 0$ . Since  $v \rightarrow (p-1)/r$  as  $u \rightarrow (p-1)/r$ , we have

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow (p-1)/r} l_2(u, v) &= \frac{p-1}{r} - (p-1) \left( \frac{p}{r} - \frac{p-1}{r} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Let us consider the value of

$$\lim_{u \rightarrow (p-1)/r} \frac{dl_2(u, v)}{du} = (p-1) + \lim_{u \rightarrow (p-1)/r} \frac{dv}{du}.$$

Applying the implicit function theorem and the De L'Hôpital's theorem to the second term of the right-hand side, we have

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow (p-1)/r} \frac{dv}{du} &= - \lim_{u \rightarrow (p-1)/r} \frac{\partial h / \partial u}{\partial h / \partial v} \\ &= - \lim_{u \rightarrow (p-1)/r} \frac{\left( \frac{p-1}{r} - u \right) \left\{ -u + s + \frac{p(p-1)}{r} \right\}^{p-2}}{\left( v - \frac{p-1}{r} \right) \left\{ -v + s + \frac{p(p-1)}{r} \right\}^{p-2}} \\ &= - \lim_{u \rightarrow (p-1)/r} \frac{\frac{p-1}{r} - u}{v - \frac{p-1}{r}} \\ &= \lim_{u \rightarrow (p-1)/r} \frac{1}{dv/du} \end{aligned}$$

which implies  $\lim_{u \rightarrow (p-1)/r} dv/du = -1$  because  $dv/du < 0$  for all  $u$  satisfying (10) and  $h(u, v) = 0$ . Hence, we have

$$\lim_{u \rightarrow (p-1)/r} \frac{dl_2(u, v)}{du} = (p-1) - 1 = p-2 < 0. \quad (15)$$

follows from (14) and (15) that there exists a positive number such that  $l_2(u, v) > 0$  for all  $u$  satisfying  $(p-1)/r - \epsilon < u < (p-1)/r$ . Assume now that  $l_2(u, v) < 0$  for some  $u$  satisfying  $s/(p-1) < u \leq (p-1)/r - \epsilon$ . Then, there must exist a  $u$  such that

$$h(u, v) = 0, \quad l_2(u, v) = 0, \quad \text{and} \quad \frac{dl_2(u, v)}{du} \geq 0. \quad (16)$$

However, we can show that there is no  $u$  satisfying (16) as follows. Taking (8) into account, we have

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dl_2(u, v)}{du} \right|_{h(u, v)=0} \\ &= (p-1) - \frac{\left(\frac{p-1}{r} - u\right) \left(v + \frac{s}{p-1}\right) \left\{-v + s + \frac{p(p-1)}{r}\right\}}{\left(v - \frac{p-1}{r}\right) \left(u + \frac{s}{p-1}\right) \left\{-u + s + \frac{p(p-1)}{r}\right\}}. \end{aligned}$$

Substituting  $v = (p-1)(p/r - u)$  into the right-hand side of the above equation, we have

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dl_2(u, v)}{du} \right|_{h(u, v)=0, l_2(u, v)=0} \\ &= -(p-1) \left\{ \frac{p(2-p)}{r(p-1)^2} \cdot \frac{(p-1)^2 + rs}{-u + s + \frac{p(p-1)}{r}} \right\}. \end{aligned}$$

Since the right-hand side is negative if  $p < 2$  and  $-s/(p-1) < (p-1)/r$ , there is no  $u$  which satisfies (16). This is a contradiction. ■

Let  $(\gamma_1, \gamma_2)$ , and  $(\omega_1, \omega_2)$  be the intersections of the possible limit cycle with the line segment  $OC$  and  $OA$ , respectively (see Fig. 5). Then, since the flow is symmetric with respect to the origin, these two intersections must satisfy

$$(\omega_1, \omega_2) = (-\gamma_1, -\gamma_2). \quad (17)$$

By using the same technique as in the proof of Lemma 5, we can derive the following lemma.

**Lemma 8:** Assume that the system (5) satisfying (7) and  $(\sqrt{rs}, p) > 0$  has a limit cycle shown in Fig. 5. Then,  $\gamma_2$  and  $\omega_2$  are expressed as  $\gamma_2 = -m(\beta)$  and  $\omega_2 = m(\alpha)$ , where

$$\begin{aligned} m(u) &\triangleq \frac{(p-1)\sqrt{s+ru^2}}{\sqrt{s}\{(p-1)^2+rs\}} \\ &\times \exp\left(\frac{p-1}{\sqrt{rs}} \arctan\left(\frac{p-1}{\sqrt{rs}} \cdot \frac{u + \frac{s}{p-1}}{u - \frac{p-1}{r}}\right)\right) \end{aligned} \quad (18)$$

*Proof:* Let us consider the trajectory  $\psi(t, (\beta, 1)) = (\psi_1(t, (\beta, 1)), \psi_2(t, (\beta, 1)))$ . Let  $t_1$  be the smallest positive value of  $t$  satisfying  $\psi_1(t, (\beta, 1)) = 0$ . Then,  $\gamma_2$  is expressed by  $\gamma_2 = \psi_2(t_1, (\beta, 1))$ . By solving the differential equation (5) for the region  $R^{(0,0)}$  under the initial condition  $x_1(0), x_2(0) = (\beta, 1)$ , we can obtain the explicit formulas

for  $\psi_1(t, (\beta, 1))$  and  $\psi_2(t, (\beta, 1))$  as follows:

$$\psi_1(t, (\beta, 1)) = e^{(p-1)t} \left( \beta \cos(\sqrt{rst}) + \sqrt{\frac{s}{r}} \sin(\sqrt{rst}) \right) \quad (19)$$

$$\psi_2(t, (\beta, 1)) = e^{(p-1)t} \left( \cos(\sqrt{rst}) - \beta \sqrt{\frac{r}{s}} \sin(\sqrt{rst}) \right) \quad (20)$$

Differentiating the right-hand side of (19) with respect to  $t$  and setting it to 0, we have

$$\begin{aligned} & \{(p-1)\beta + s\} \cos(\sqrt{rst}) + \\ & \left\{ (p-1) \sqrt{\frac{s}{r}} - \beta \sqrt{rs} \right\} \sin(\sqrt{rst}) = 0. \end{aligned}$$

Solving this equation for  $t$ , we have the explicit formula for  $t_1$  as

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{rs}} \arctan\left(\frac{p-1}{\sqrt{rs}} \cdot \frac{\beta + \frac{s}{p-1}}{\beta - \frac{p-1}{r}}\right), \quad 0 < t_1 < \frac{\pi}{2\sqrt{rs}}$$

Substituting  $t = t_1$  into (20) and simplifying the formula, we derive

$$\begin{aligned} \psi_2(t_1, (\beta, 1)) &= -\frac{(p-1)\sqrt{s+rs\beta^2}}{\sqrt{s}\{(p-1)^2+rs\}} \\ &\times \exp\left(\frac{p-1}{\sqrt{rs}} \arctan\left(\frac{p-1}{\sqrt{rs}} \cdot \frac{\beta + \frac{s}{p-1}}{\beta - \frac{p-1}{r}}\right)\right) \end{aligned}$$

which completes our proof for  $\gamma_2 = -m(\beta)$ . The second equation  $\omega_2 = m(\alpha)$  is derived in a similar way. ■

By analyzing the function  $m(u)$  defined by (18) itself, we obtain the following two lemmas.

**Lemma 9:** The function  $m(u)$  is monotone increasing for  $u > (p-1)/r$ .

*Proof:* We will show the monotonicity of  $m^2(u)$  instead of  $m(u)$  itself. Differentiating  $m^2(u)$ , we have

$$\begin{aligned} \frac{dm^2(u)}{du} &= \tilde{m}(u) \left\{ 2ru + (s+ru^2) \cdot \frac{2(p-1)}{\sqrt{rs}} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{d}{du} \arctan\left(\frac{p-1}{\sqrt{rs}} \cdot \frac{u + \frac{s}{p-1}}{u - \frac{p-1}{r}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

where  $\tilde{m}(u)$  is defined by

$$\begin{aligned} \tilde{m}(u) &\triangleq \frac{(p-1)^2}{s\{(p-1)^2+rs\}} \\ &\times \exp\left(\frac{2(p-1)}{\sqrt{rs}} \arctan\left(\frac{p-1}{\sqrt{rs}} \cdot \frac{u + \frac{s}{p-1}}{u - \frac{p-1}{r}}\right)\right). \end{aligned} \quad (22)$$

It is apparent that  $\tilde{m}(u) > 0$  for  $u > (p-1)/r$ . Taking  $\arctan'(x) = 1/(x^2+1)$  into account, we have

$$\frac{d}{du} \arctan\left(\frac{p-1}{\sqrt{rs}} \cdot \frac{u + \frac{s}{p-1}}{u - \frac{p-1}{r}}\right) = -\frac{\sqrt{rs}}{s+ru^2}. \quad (23)$$

Substituting (23) into (21), we have  $dm^2(u)/du = 2r\tilde{m}(u)(u - (p-1)/r)$ , which is positive for  $u > (p-1)/r$ . ■

**Lemma 10:** If  $p < 2$  and  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$ , then  $m^2((p-1)(p/r-u)) > m^2(u)$  for any  $u$  satisfying  $-s/(p-1) < u < (p-1)/r$ .

*Proof:* Let  $o(u) \triangleq m^2((p-1)(p/r-u)) - m^2(u)$ . Since  $(p-1)(p/r-u) \rightarrow s + p(p-1)/r$  as  $u \rightarrow -s/(p-1)$ , we have

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -s/(p-1)} o(u) &= m^2\left(s + \frac{p(p-1)}{r}\right) - m^2\left(-\frac{s}{p-1}\right) \\ &= \frac{(p-1)^2(p^2+rs)}{rs} \exp\left(\frac{2(p-1)}{\sqrt{rs}} \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{rs}}\right)\right) - 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

where the last inequality holds from  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$ . Also, since  $(p-1)(p/r-u) \rightarrow (p-1)/r$  as  $u \rightarrow (p-1)/r$ , we have

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow (p-1)/r} o(u) &= \lim_{u \rightarrow (p-1)/r+0} m^2(u) - \lim_{u \rightarrow (p-1)/r-0} m^2(u) \\ &= \frac{(p-1)^2}{rs} \exp\left(\frac{2(p-1)}{\sqrt{rs}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \frac{(p-1)^2}{rs} \exp\left(\frac{2(p-1)}{\sqrt{rs}} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

where  $u \rightarrow (p-1)/r+0$  and  $u \rightarrow (p-1)/r-0$  mean that  $u$  approaches  $(p-1)/r$  from above and below, respectively. From the above two inequalities, it suffices for us to show that, for any  $u$  satisfying  $o'(u) = 0$ , the function  $o(u)$  takes a positive value. Differentiating  $o(u)$ , we have

$$\begin{aligned} \frac{do(u)}{du} &= \frac{d}{du} m^2\left((p-1)\left(\frac{p}{r}-u\right)\right) - \frac{d}{du} m^2(u) \\ &= 2r\tilde{m}\left((p-1)\left(\frac{p}{r}-u\right)\right) \\ &\quad \times \left\{(p-1)\left(\frac{p}{r}-u\right) - \frac{p-1}{r}\right\} \{-(p-1)\} \\ &\quad - 2r\tilde{m}(u)\left(u - \frac{p-1}{r}\right) \\ &= 2r\left(u - \frac{p-1}{r}\right) \\ &\quad \times \left\{(p-1)^2\tilde{m}\left((p-1)\left(\frac{p}{r}-u\right)\right) - \tilde{m}(u)\right\} \end{aligned}$$

where  $\tilde{m}(u)$  is given by (22). Thus,  $o'(u) = 0$  if and only if  $\tilde{m}((p-1)(p/r-u)) = \tilde{m}(u)/(p-1)^2$ . We therefore have

$$\begin{aligned} o(u)|_{o'(u)=0} &= \tilde{m}\left((p-1)\left(\frac{p}{r}-u\right)\right) \left\{s+r(p-1)^2\left(\frac{p}{r}-u\right)^2\right\} \\ &\quad - \tilde{m}(u)(s+ru^2) \\ &= \frac{\tilde{m}(u)}{(p-1)^2} \left\{s+r(p-1)^2\left(\frac{p}{r}-u\right)^2\right\} - \tilde{m}(u)(s+ru^2) \\ &= p\tilde{m}(u) \left\{\frac{s(2-p)}{(p-1)^2} + \frac{p}{r} - 2u\right\} \\ &> p\tilde{m}(u) \left\{\frac{s(2-p)}{(p-1)^2} + \frac{p}{r} - \frac{2(p-1)}{r}\right\} \\ &= p(2-p)\tilde{m}(u) \left\{\frac{1}{r} + \frac{s}{(p-1)^2}\right\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

where the last inequality holds from  $p < 2$ .

Now, we are ready for presenting the following lemma which completes our proof of Theorem 1.

**Lemma 11:** If the system (5) satisfies (7) and  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$  then it has no limit cycle.

*Proof:* Suppose there exists a limit cycle shown in Fig. 5. In the case where  $p \geq 2$ , as shown in Lemma 6,  $\alpha < (p-1)/r < \beta$  and  $\alpha^2 < \beta^2$  hold. One can easily see from these conditions that  $m^2(\alpha) < m^2(\beta)$ . In the case where  $p < 2$  and  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$ , we also have from Lemmas 7, 9, and 10 that

$$m^2(\alpha) < m^2\left((p-1)\left(\frac{p}{r}-\alpha\right)\right) < m^2(\beta).$$

Note that  $m^2(\alpha) < m^2(\beta)$  implies  $\omega_2 < -\gamma_2$ . However, this contradicts (17). Thus, there is no limit cycle if either: 1)  $p \geq 2$  or 2)  $p < 2$  and  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$  holds. Since  $p \geq 2$  implies  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$ , these two conditions can be unified as  $g(\sqrt{rs}, p) > 0$ . ■

#### IV. EXTENSION TO FULL-RANGE CNN MODEL

Corinto and Gilli [29] studied the complete stability of a more general CNN model described by

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(1+\mu)x_1 + (a_{11}+\mu)f(x_1) + a_{12}f(x_2) \\ \dot{x}_2 = -(1+\mu)x_2 + a_{21}f(x_1) + (a_{22}+\mu)f(x_2) \end{cases} \quad (24)$$

where  $\mu \geq 0$  is an additional parameter. This is a special case of the so-called full-range CNNs (FRCNNs). By extending some results given in [26], they have shown that the dynamical behavior of the system (24) is not equivalent to that of (3) for some  $\mu \geq 0$ . In addition, they have given the following theorem.

**Theorem 3:** If the parameters in (24) satisfy

$$a_{11} = a_{22} = p, \quad a_{12} = s, \quad a_{21} = -r, \quad 0 < s \leq p-1 < r \quad (25)$$

and

$$\exp\left(\frac{2(p-1)}{\sqrt{rs}} \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{rs}}\right)\right) - \frac{rs(1+\mu)^2}{(p-1)^2\{(p+\mu)^2+rs\}} > 0 \quad (26)$$

then the system (24) is completely stable.

It is easily seen that Theorem 3 is a generalization of Theorem 1. In order to prove Theorem 3, Corinto and Gilli first showed that if

$$\exp\left(\frac{2(p-1)}{\sqrt{rs}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{rs}{(p-1)^2} > 0 \quad (27)$$

then the system (24) with (25) is completely stable. They next considered two points  $(\sqrt{r_1 s_1}, p_1)$  and  $(\sqrt{r_1 s_1}, p_2)$  in the  $\sqrt{rs} - p$  plane such that the former satisfies both (26) and (27) and the latter satisfies only (26) and claimed that the system (24) never presents a structural instability of the first degree at any point on the line segment connecting  $(\sqrt{r_1 s_1}, p_1)$  and  $(\sqrt{r_1 s_1}, p_2)$ . In particular, they claimed that a limit cycle of multiplicity 2 can never appear because there is no limit cycle at  $(\sqrt{r_1 s_1}, p_1)$ . However, this is not correct because a limit cycle of multiplicity two, or a half-stable limit cycle, may suddenly appear in the process of decreasing the value of  $p$  from  $p_1$  to

2. Therefore, we have to say that the proof for [29, Theorem 3] is incomplete.

On the other hand, however, Theorem 3 can be rigorously proved by extending the results given in the previous section. Let us suppose that the system (24) satisfying (25) has a limit cycle shown in Fig. 5.<sup>1</sup> First, taking into account that the state (3) and (24) have the same form in the region  $R^{(0,0)}$ , we can easily see that Lemmas 8 and 9 hold for the system (24) satisfying (25). Second, we can generalize Lemmas 4–7 and 10 for the system (24) with (25) as follows.

**Lemma 12:**  $\beta < s/(1 + \mu) + (p + \mu)(p - 1)/\{r(1 + \mu)\}$ .

**Lemma 13:**  $\alpha$  and  $\beta$  satisfy

$$\left(\alpha + \frac{s}{p-1}\right)^{\mu+1} \left\{s + \frac{(p+\mu)(p-1)}{r} - \alpha(\mu+1)\right\}^{p-1} \\ = \left(\beta + \frac{s}{p-1}\right)^{\mu+1} \left\{s + \frac{(p+\mu)(p-1)}{r} - \beta(\mu+1)\right\}^{p-1}.$$

**Lemma 14:** If  $p \geq \mu + 2$ , then  $\beta^2 > \alpha^2$ .

**Lemma 15:** If  $p < \mu + 2$ , then  $\beta \geq ((p - 1)/(\mu + 1))((p + \mu)/r - \alpha)$ .

**Lemma 16:** If  $p < \mu + 2$  and (26) hold, then  $m^2((p - 1)((p + \mu)/r - u)/(\mu + 1)) > m^2(u)$  for any  $u$  satisfying  $-s/(p - 1) < u < (p - 1)/r$ .

We omit the proofs of these five lemmas because they are similar to those of Lemmas 4–7 and 10. Theorem 3 can be proved by using Lemmas 8, 9, and 12–16 in the same way as the proof of Lemma 11. In addition, since Lemmas 1 and 2 hold for the system (24) with (25) and Lemma 3 can be generalized<sup>2</sup> in the same way as above, we have the following theorem which is a generalization of Theorem 1.

**Theorem 4:** The system (24) with (25) is completely stable if and only if  $p - 1 \geq s$  and (26) hold simultaneously.

## V. CONCLUSION

We have studied the complete stability of planar piecewise-linear dynamical systems related to CNNs consisting of two cells. Exploring the phase portrait in detail, we have derived the necessary and sufficient condition for such a system to be completely stable. Complete stability analysis of the system for more general cases, for example, the case where biases are set to nonzero values or the case where self-coupling coefficients do not take the same value, is the future problem.

## REFERENCES

- [1] M. A. Cohen and S. Grossberg, "Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. SMC-13, no. 5, pp. 815–826, Sep. 1983.
- [2] J. J. Hopfield, "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons," in *Proc. Nat. Acad. Sci.*, May 1984, vol. 81, pp. 3088–3092.
- [3] R. M. Golden, "The brain-state-in-a-box neural model is a gradient descent algorithm," *J. Math. Psychol.*, vol. 30, pp. 73–80, 1986.
- [4] G. Avitabile, M. Forti, S. Manetti, and M. Marini, "On a class of non-symmetrical neural networks with applications to ADC," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 38, no. 2, pp. 202–209, Feb. 1991.
- [5] K. Matsuoka, "Stability condition for nonlinear continuous neural networks with asymmetric connections weights," *Neural Netw.*, vol. 5, pp. 495–500, 1992.
- [6] S. Hui and S. H. Zak, "Dynamical analysis of the brain-state-in-a-box (BSB) neural models," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 3, no. 1, pp. 86–94, Jan. 1992.
- [7] M. Forti and A. Tesi, "New conditions for global stability of neural networks with applications to linear and quadratic programming problems," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 42, no. 7, pp. 354–366, Jul. 1995.
- [8] T. Hu and Z. Lin, "A complete stability analysis of planar linear dynamical systems under saturation," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 47, no. 4, pp. 498–512, Apr. 2000.
- [9] —, "A complete stability analysis of planar discrete-time linear systems under saturation," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 48, no. 6, pp. 710–725, Jun. 2001.
- [10] J. J. Hopfield and D. W. Tank, "Neural computation of decisions optimization problems," *Biological Cybern.*, vol. 52, pp. 141–152, 1985.
- [11] D. W. Tank and J. J. Hopfield, "Simple 'neural' optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-33, pp. 533–541, May 1986.
- [12] A. N. Michel and J. A. Farrell, "Associative memories via neural networks," *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 10, pp. 6–17, Apr. 1990.
- [13] L. O. Chua and L. Yang, "Cellular neural networks: theory," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 35, no. 10, pp. 1257–1272, Oct. 1988.
- [14] —, "Cellular neural networks: applications," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 35, no. 10, pp. 1273–1290, Oct. 1988.
- [15] L. O. Chua and T. Roska, *Cellular Neural Networks and Visual Computing*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2002.
- [16] —, "Stability of a class of nonreciprocal cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 37, no. 12, pp. 1520–1527, Dec. 1990.
- [17] L. O. Chua and C. W. Wu, "On the universe of stable cellular neural networks," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 20, pp. 497–517, 1992.
- [18] P. P. Civalleri and M. Gilli, "On the dynamic behaviour of two-cell cellular neural networks," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 21, pp. 451–471, 1993.
- [19] P. P. Civalleri, M. Gilli, and L. Pandolfi, "On stability of cellular neural networks with delay," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 40, no. 3, pp. 157–165, Mar. 1993.
- [20] M. Gilli, "Stability of cellular neural networks and delayed cellular neural networks with nonpositive templates and nonmonotonic output functions," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 41, no. 8, pp. 518–528, Aug. 1994.
- [21] S. Arik and V. Tavsanoğlu, "Equilibrium analysis of non-symmetric CNNs," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 24, pp. 269–274, 1996.
- [22] C. W. Wu and L. O. Chua, "A more rigorous proof of complete stability of cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 44, no. 4, pp. 370–371, Apr. 1997.
- [23] S. Arik and V. Tavsanoğlu, "Equilibrium analysis of delayed CNN's," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 45, no. 2, pp. 168–171, Feb. 1998.
- [24] N. Takahashi and L. O. Chua, "On the complete stability of nonsymmetric cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 45, no. 7, pp. 754–758, Jul. 1998.
- [25] N. Takahashi, "A new sufficient condition for complete stability of cellular neural networks with delay," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 47, no. 6, pp. 793–799, Jun. 2000.
- [26] N. Takahashi and T. Nishi, "On the global stability of two-cell cellular neural networks with opposite-sign connections," in *Proc. 15th Eur. Conf. Circuit Theory Des. (ECCTD2001)*, Espoo, Finland, Sep. 2001, pp. 93–96.
- [27] G. Setti, P. Thiran, and C. Serpico, "An approach to information propagation in 1-D cellular neural networks—Part II: Global propagation," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 45, no. 8, pp. 790–811, Aug. 1998.
- [28] G. De Sandre, "Stability of 1-D-CNN's with Dirichlet boundary conditions and global propagation dynamics," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 47, no. 6, pp. 785–792, Jun. 2000.
- [29] F. Corinto and M. Gilli, "Comparison between the dynamics behaviour of Chua-Yang and full-range cellular neural networks," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 31, pp. 423–441, 2003.

<sup>1</sup>Expressions of the equilibrium points must be modified as  $E^{(0,+)} = -s/(p - 1), (rs/(p - 1) + p + \mu)/(1 + \mu)$ , and so on.

<sup>2</sup>The generalized version of Lemma 3 is given in [29].

# Necessary and Sufficient Conditions for a 1-D DBCNN with an Input to Be Stable in terms of Connection Coefficients

Tetsuo NISHI<sup>†a)</sup>, Fellow, Hajime HARA<sup>††</sup>, and Norikazu TAKAHASHI<sup>†††</sup>, Members

**SUMMARY** We give necessary and sufficient conditions for a 1-D DBCNN (1-dimensional discrete-time binary cellular neural network) with an external input to be stable in terms of connection coefficients. The results are generalization of our previous one [18], [19] in which the input was assumed to be zero.

**key words:** 1-D DBCNN, CNN, stability, nonzero input

## 1. Introduction

One of the most fundamental problems of cellular neural networks (CNN) from the theoretical point of view is the stability [1]–[19], while the ability for 1-dimensional and 2-dimensional signal processing is important from the practical point of view [20]–[25]. However many stability problems still remain unsolved completely even for 1-dimensional CNN's [2]–[16].

For continuous-time 1-dimensional systems various stability conditions have been studied based on various formulations (for example, type of an activation function, assumptions for connection coefficients, etc.) [2]–[16], but complete stability conditions still remain unsolved.

In this paper we study on the stability of a 1-dimensional discrete-time binary cellular neural networks (abbreviated as a 1-D DBCNN). Though the 1-D DBCNN is the simplest 1-D system, its stability problem is not so easy to solve. Previously we gave the necessary and sufficient conditions for them to be stable in terms of “changeable sets,” which is briefly explained later [15], [16]. But the conditions are not necessarily convenient for us, because the relation between connection coefficients and changeable sets are not explicitly described.

In this paper we give the necessary and sufficient stability conditions in terms of connection coefficients for a 1-D DBCNN with an external input (which we call a “general 1-D DBCNN” simply), the results being a generalization of those for no external input case [17], [18]. The results greatly depend on [16].

Manuscript received January 31, 2006.

Final manuscript received May 22, 2006.

<sup>†</sup>The author is with the Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Tokyo, 169-0072 Japan.

<sup>††</sup>The author is with the Department of Electronics and Photonic Systems Engineering, Hiroshima Institute of Technology, Hiroshima-shi, 731-5193 Japan.

<sup>†††</sup>The author is with the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University, Fukuoka-shi, 812-8581 Japan.

a) E-mail: nishi-t@waseda.jp

DOI: 10.1093/ietfec/e89-a.10.2825

## 2. Preliminaries

Let  $S$  be a 1-D DBCNN composed of  $n$  neurons. The behavior of  $S$  can be described by the equation\*:

$$x(k+1) = \text{sgn}[Ax(k) + Bu + \theta \mathbf{1}] \quad (1)$$

where  $x(k) = [x_1(k), \dots, x_n(k)]^T$  and  $u = [u_1, \dots, u_n]^T$  are respectively a binary state vector at time  $k$  and a binary time-invariant external input vector (hereafter the term “external” will be omitted),  $n$  is the dimension of  $S$ ,  $A$  and  $B$  are  $n \times n$  matrices determined by the A- and B-templates,  $\theta$  is a scalar representing the threshold value, and  $\mathbf{1}$  is an  $n$ -dimensional column vector consisting of 1 only. In particular  $x(0)$  is an initial state vector, which can be used as another input data in many applications. We assume a 1-neighborhood 1-D DBCNN. Then Eq. (1) can be rewritten in a scalar form as:

$$x_i(k+1) = \text{sgn} [\beta x_{i-1}(k) + \alpha x_i(k) + \gamma x_{i+1}(k) + \theta_i] \quad (2)$$

( $i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\theta_i \equiv \hat{\beta}u_{i-1} + \hat{\alpha}u_i + \hat{\gamma}u_{i+1} + \theta$$

For no input case ( $u = 0$ ) Eq. (2) becomes:

$$x_i(k+1) = \text{sgn} [\beta x_{i-1}(k) + \alpha x_i(k) + \gamma x_{i+1}(k) + \theta] \quad (3)$$

When we calculate  $x_i(k+1)$  by Eq. (2), we have to define the boundary values  $x_0(k)$  and  $x_{n+1}(k)$  for the state vector  $x$  and  $u_0$  and  $u_{n+1}$  for the input vector  $u$ , respectively. The fixed boundary considered in this paper means that  $x_0(k)$  and  $x_{n+1}(k)$  are (unspecified) constants independent of  $k$ .

Note that Eq. (2) corresponds to varying threshold case and that  $\theta_i$  takes one of eight values, i.e.,  $\pm\hat{\beta} \pm \hat{\alpha} \pm \hat{\gamma} + \theta$ , which we denote as  $\theta_{0j}$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ). The explicit correspondence between  $\theta_{0j}$  and  $\pm\hat{\beta} \pm \hat{\alpha} \pm \hat{\gamma} + \theta$  will be described later. Note that the set  $\{\theta_{0j}; j = 1, \dots, 8\}$  are determined from only the parameters,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$ , and  $\theta$ , but that  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) depends not only the above parameters but also an input sequence  $u$  itself.

Note also that since  $S$  has a finite number of states, it either converges to an equilibrium point or reaches a periodic solution (with length  $\geq 2$ ), which we call a limit cycle hereafter, in a finite number of steps.

**Definition 1:** A 1-D DBCNN  $S$  is said to be stable, if no limit cycle occur for any  $x(0)$ , any  $u$ , any boundary conditions on  $x$  and  $u$ , and any value of the dimension  $n$ . The

\*In the case of cellular automata the “sgn” function in Eq. (1) should be replaced with an arbitrary logic function.

item being not stable is said to be unstable.

When we discuss the stability, we can formulate the problem in two ways as follows:

**Problem A:** Prescribed parameters  $\alpha, \beta, \gamma, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  and  $\theta$ , is system  $S$  stable for an arbitrary input data  $u$  or not?

**Problem B:** Prescribed parameters  $\alpha, \beta, \gamma$  and  $\theta$ , can we determine the parameters  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ , and  $\hat{\gamma}$  so that  $S$  is stable for input data  $u$  (or unstable for some input  $u$ )?

In this paper we give the answer to the above two problems.

### Stability Conditions in terms of Connection Coefficients for a General 1-D DBCNN

First we consider Problem A in Sect. 2.

Throughout this paper we assume without loss of generality that

$$|\beta| \geq |\gamma| \quad (4)$$

We first state the main results (Lemmas 1–7 and Theorem 1), in which we use the terminologies, an S-T, an S-, a T-points, and an S-T path which will be defined in Sect. 4 (see Definitions 2 and 3). As will be shown in Sect. 4 (see Theorem 5), the instability of Eq. (2) is equivalent to the existence of either 1) an S-T-point, or, 2) the existence of an S- and a T-points and an S-T path satisfying the I-condition. The derivation of these results will be shown in Sect. 4.

#### Conditions for the Existence of an S-T-Point

**Lemma 1:** The S-T-point exists if and only if at least one of conditions (5)–(10) holds.

**Case 1)**

$$\begin{aligned} &\text{If } \alpha < -|\gamma| \text{ and } \alpha < -(|\beta| - |\gamma|), \text{ then} \\ &0 \leq |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (5)$$

**Case 2)**

$$\begin{aligned} &\text{If } \alpha < -|\gamma| \text{ and } \alpha > -(|\beta| - |\gamma|), \text{ then} \\ &\alpha + |\beta| - |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (6)$$

**Case 3)**

$$\begin{aligned} &\text{If } -|\gamma| < \alpha < 0 \text{ and } \alpha > -(|\beta| - |\gamma|), \text{ then} \\ &\alpha + |\beta| + |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha + |\beta| - |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| - |\gamma| \quad (8)$$

**Case 4)**

$$\begin{aligned} &\text{If } -|\gamma| < \alpha < 0 \text{ and } \alpha < -(|\beta| - |\gamma|), \text{ then} \\ &\alpha + |\beta| + |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (9)$$

$$0 \leq |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| - |\gamma| \quad (10)$$

Let us summarize Cases 1) and 2) can be summarized compactly as

follows:

**Case 1-2)**

$$\begin{aligned} &\text{If } \alpha < -|\gamma|, \text{ then} \\ &\alpha + |\beta| - |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (11)$$

Similarly Cases 3) and 4) are summarized as:

**Case 3-4)**

$$\begin{aligned} &\text{If } -|\gamma| < \alpha < 0, \text{ then} \\ &\alpha + |\beta| + |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (12)$$

or

$$\alpha + |\beta| - |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| - |\gamma| \quad (13)$$

Note that Eqs. (11), (12) and (13) are valid even if the values of their lower bounds become negative.

### 3.2 Conditions for the Existence of an S-Point

**Lemma 2:** The S-point exists if and only if one of the conditions (14) and (15) holds.

**Case 5)**

$$\begin{aligned} &\text{If } \alpha < |\gamma| \text{ and } \alpha < -(|\beta| - |\gamma|), \text{ then} \\ &0 \leq |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (14)$$

**Case 6)**

$$\begin{aligned} &\text{If } \alpha < |\gamma| \text{ and } \alpha > -(|\beta| - |\gamma|), \text{ then} \\ &\alpha + |\beta| - |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (15)$$

Cases 5) and 6) are summarized as:

**Case 5-6)**

$$\begin{aligned} &\text{If } \alpha < |\gamma|, \text{ then} \\ &\alpha + |\beta| - |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (16)$$

### 3.3 Conditions for the Existence of a T-Point

**Lemma 3:** The T-point exists if and only if one of the conditions (17) and (18) holds.

**Case 7)**

$$\begin{aligned} &\text{If } \alpha < |\beta| \text{ and } \alpha < |\beta| - |\gamma|, \text{ then} \\ &0 \leq |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (17)$$

**Case 8)**

$$\begin{aligned} &\text{If } \alpha < |\beta| \text{ and } \alpha > |\beta| - |\gamma|, \text{ then} \\ &\alpha - |\beta| + |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (18)$$

Cases 7) and 8) are summarized as:

**Case 7-8)**

$$\begin{aligned} &\text{If } \alpha < |\beta|, \text{ then} \\ &\alpha - |\beta| + |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (19)$$

### 3.4 Conditions for the I-Condition

**Lemma 4:** The I-condition is satisfied if and only if the condition (20) holds.

**Case 9)**

$$\begin{aligned} |\beta| - |\gamma| < \alpha < |\beta| + |\gamma| \text{ and} \\ \alpha - |\beta| - |\gamma| < -\theta_{0j} < \alpha - |\beta| + |\gamma| \end{aligned} \quad (20)$$

### 3.5 Main Results

We will summarize the above results in Sects. 3.1–3.4. In the first we see from Lemmas 1 and 2 that

**Lemma 5:** If

$$\alpha \geq |\gamma|, \quad (21)$$

then neither an S-T-point nor an S-point exists and therefore the system in Eq. (2) is stable regardless of both the values of  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$ , and an input  $u$  (See Theorem 2).

So we will next investigate the case where  $\alpha < |\gamma|$ .

First we consider the case:

$$0 \leq \alpha < |\gamma| \quad (22)$$

**Lemma 6:** Under the condition (22) the system (2) is unstable if and only if there exist an S-point satisfying

$$\alpha + |\beta| - |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \quad (23)$$

and a T-point satisfying

$$\alpha - |\beta| + |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \quad (24)$$

and the S-T path satisfying Eq. (20) for some appropriate  $\theta_{0j}$ 's. Note that  $\theta_{0j}$ 's in Eq. (23) need not be the same as that in Eq. (24) as well as Eq. (20).

Next we consider the case where

$$\alpha < 0 \quad (25)$$

**Lemma 7:** In the case of Eq. (25) if

$$\alpha - |\beta| + |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \quad (26)$$

holds for appropriate  $\theta_{0j}$ 's, then either an S-T-point or both S- and T-points exist. Then the system is unstable unless the S-T path has length  $\geq 2$ .

Note that an S-T path of length 3 or more does not satisfy because of Eq. (25).

By combining Lemmas 5, 6 and 7, we have:

**Theorem 1:** The system (2) is unstable if and only if there exist some appropriate  $\theta_{0j}$ 's described in Lemmas 6 and 7.

Theorem 1 gives the solution for Problem A in Sect. 2.

### 3.6 Solution for Problem B

In this section we consider Problem B in Sect. 2. We can give an affirmative answer to this problem: Suppose that the system (3) is stable (resp., unstable). Then we can give  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ , and  $\hat{\gamma}$  such that Eq. (2) is unstable (resp., stable).

This can be shown by choosing appropriately  $\theta_{0j}$ . But we will omit the detail.

### 3.7 “No Input Case” as a Special Case of a General Case

In no input case we have  $\theta_{0j} = \theta$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ). So the existence of both an S-point and a T-point implies the existence of a limit cycle. In this case we do not need to consider the I-condition. Then from Lemmas 5, 6 and 7 we have the instability conditions for no input case as follows:

**Theorem 2:** Under the assumption in Eq. (4) the system  $S$  in Eq. (3) is unstable if and only if one of the following conditions a) and b) holds:

- a)  $0 \leq \alpha \leq |\gamma|$  and  $|\alpha| + |\beta| - |\gamma| < |\theta| < -|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ .
- b)  $\alpha < 0$  and  $-|\alpha| + |\beta| - |\gamma| < |\theta| < |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$

Conversely, we have:

**Theorem 3:** Under the same assumption in Theorem 2 the system (3) is stable if and only if one of the following conditions c), d) and e) holds:

- c)  $\alpha \geq |\gamma|$
- d)  $0 \leq \alpha \leq |\gamma|$  and either one of the following conditions d-1) and d-2) holds.
  - d-1)  $|\theta| \geq -|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$
  - d-2)  $|\theta| \leq |\alpha| + |\beta| - |\gamma|$
- e)  $\alpha < 0$  and either one of the following conditions e-1) and e-2) holds.
  - e-1)  $|\theta| \geq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$
  - e-2)  $|\theta| \leq -|\alpha| + |\beta| - |\gamma|$  and  $|\beta| > |\alpha| + |\gamma|$

These are the same as the results in our previous paper.

### 3.8 Examples

**Example 1:** Let  $\beta = 4$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\theta = -2$ . Then the  $\alpha$ -terms,  $\alpha \pm |\beta| \pm |\gamma|$ , are 7, 3, -1, and -5, and  $\bar{\alpha}$ -terms,  $-\alpha \pm |\beta|$ ,  $\pm |\gamma|$  are 5, 1, -3, and -7. These parameters does not satisfy the condition in Theorem 3. So if there is no input, the system is stable.

Suppose that

$$\hat{\alpha} = 3.5, \hat{\beta} = 2, \hat{\gamma} = 2, \theta = 0.5$$

Then we have (see Fig. 1)

$$\theta_{01} = -7, \theta_{02} = -3, \theta_{03} = 4$$

$$\theta_{04} = 0, \theta_{05} = 1, \theta_{06} = -3$$

$$\theta_{07} = 4, \theta_{08} = 8$$

We therefore easily see that  $\theta_{07}$  is an S-point and  $\theta_{05}$  is a

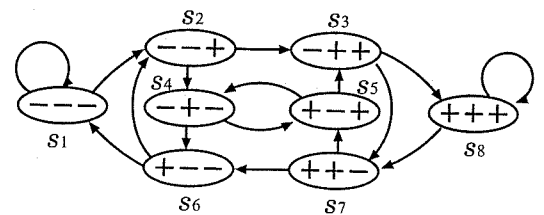


Fig. 1 Input transition diagram.

oint and these are connected by an S-T path satisfying I-condition. So the system is unstable. Indeed these meters satisfy Eqs. (16) and (19).

**mple 2:** Let  $\alpha = 2$ ,  $|\beta| = 3$ ,  $|\gamma| = 2.5$ ,  $\hat{\alpha} = 10$ ,  $\hat{\beta} = 8$ ,  $-20$  and  $\theta = 0$ . Then the  $\alpha$ -terms,  $\alpha \pm |\beta| \pm |\gamma|$  are 7.5, 1.5, and  $-3.5$ , and  $\bar{\alpha}$ -terms,  $-\alpha \pm |\beta| \pm |\gamma|$  are 3.5,  $-1.5$ , 5, and  $-7$ . We therefore have (see Fig. 1.):

$$\begin{aligned}\theta_{01} &= 2, \theta_{02} = -38, \theta_{03} = -22 \\ \theta_{04} &= 22, \theta_{05} = -22, \theta_{06} = 18 \\ \theta_{07} &= 38, \theta_{08} = -2\end{aligned}$$

This example shows that  $\theta_{01}$  is an S-point and  $\theta_{08}$  is a jint, and therefore the system has both an S-point and -point, but is stable, because Eq. (20) in Case 9 is not sfied (i.e., the S-T path does not satisfy the I-condition).

### Proof of Theorem 1

#### Stability Conditions in terms of Changeable Set

his section we give the summary of the stability condis- is for a general 1-D DBCNN in terms of changeable sets l.

#### 1 Case Where $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = 0$ (No Input Case)

st we state no input case. Then  $S$  can be described as (3).

Since  $x_{i-1}(k)$ ,  $x_i(k)$  and  $x_{i+1}(k)$  in Eq. (3) take 1 or  $-1$ ,  $-1(k) + \alpha x_i(k) + \gamma x_{i+1}(k)$  takes one of eight values,  $\pm\beta \pm \alpha$ . We classify the terms  $\pm\beta \pm \alpha \pm \gamma$  into two classes;  $\pm\beta + \alpha$  are called  $\alpha$ -terms, while  $\pm\beta - \alpha \pm \gamma$  are called  $\bar{\alpha}$ -terms. course the value  $\alpha$  may be positive or negative.

#### 2 Definition of a Changeable Pattern and an Invariant Pattern

3 triplet  $(x_{i-1}(k), x_i(k), x_{i+1}(k))$  takes one of the follow- eight patterns;  $(-1, -1, -1)$ ,  $(-1, -1, 1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(-1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, -1)$ ,  $(1, -1, 1)$ ,  $(1, 1, -1)$ , and  $(1, 1, 1)$ . For ne of these eight triplets,  $x_i(k+1)$  changes from  $x_i(k)$  1 for other triplets  $x_i(k+1)$  is the same as  $x_i(k)$ . We call former triplets "changeable patterns" and the latter ones variant patterns"(See the following examples).

We denote the set of all changeable patterns by  $\Phi(\theta)$  simply  $\Phi$ ), which is called a changeable set. Of course depends on  $\theta$ , but does not depend on the neuron  $i$ .

Throughout this paper the variables  $y_i$  and  $y'_i$  ( $i = 2, \dots$ ) denote the binary values 1 or  $-1$  and " $\overline{y_i}$ " means

$$\overline{y_i} = \begin{cases} 1 & \text{if } y_i = -1 \\ -1 & \text{if } y_i = 1 \end{cases} \quad (27)$$

If an  $\alpha$ -term  $y_1\beta + \alpha + y_3\gamma$  satisfies

$$y_1\beta + \alpha + y_3\gamma < -\theta, \quad (28)$$

en we have  $y_1\beta + \alpha + y_3\gamma + \theta < 0$ . This means from Eq. (3)

that  $x_i(k) = 1$  and  $x_i(k+1) = -1$  and therefore

$$\Phi(\theta) \ni (y_1, 1, y_3) \quad (29)$$

Conversely<sup>†</sup>, if  $y_1\beta + \alpha + y_3\gamma$  satisfies

$$y_1\beta + \alpha + y_3\gamma > -\theta, \quad (30)$$

then  $x_i(k) = x_i(k+1) = 1$  and therefore we have:

$$\Phi(\theta) \ni (y_1, 1, y_3) \quad (31)$$

In a similar way we can discuss the case of an  $\bar{\alpha}$ -term as follows: If the  $\bar{\alpha}$ -term  $y_1\beta - \alpha + y_3\gamma$  satisfies

$$y_1\beta - \alpha + y_3\gamma > -\theta, \quad (32)$$

then we have:

$$\Phi(\theta) \ni (y_1, -1, y_3) \quad (33)$$

and if  $y_1\beta - \alpha + y_3\gamma$  satisfies

$$y_1\beta - \alpha + y_3\gamma < -\theta, \quad (34)$$

then we have:

$$\Phi(\theta) \ni (y_1, -1, y_3) \quad (35)$$

#### 4.1.3 Theorem for No Input Case

**Theorem 4** [16]: The system  $S$  described by Eq. (3) is unstable if and only if at least one of the following two conditions (Eqs. (36) and (37)) holds for some  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

$$\Phi(\theta) \supseteq \{(y_1, y_2, y_3), (y_1, \overline{y_2}, y_3)\} \quad (36)$$

$$\Phi(\theta) \supseteq \{(y_1, y_2, y_3), (y_1, \overline{y_2}, \overline{y_3}), (\overline{y_1}, y_2, \overline{y_3})\} \quad (37)$$

#### 4.1.4 General 1-D DBCNN (Nonzero Input Case)

Replacing  $\theta$  in Sects. 4.1.2 and 4.1.3 by each  $\theta_{0j}$ , we can similarly define a changeable set  $\Phi(\theta_{0j})$  ( $j = 1, \dots, 8$ ) for each  $\theta_{0j}$ . That is, a changeable set  $\Phi(\theta_{0j})$  consists of changeable patterns corresponding to  $\alpha$ -terms less than  $-\theta_{0j}$  and those corresponding to  $\bar{\alpha}$ -terms greater than  $-\theta_{0j}$ . Of course  $\Phi(\theta_{0j})$  may be the null set.

In order to represent an input data  $u$ , we will introduce a directed graph  $G = G(V, E)$  (See Fig. 1 and also [16]) as follows:

Let  $u'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) be  $\pm 1$ . Then the vertices (points)  $V$  of  $G$  consist of all triplets  $(u'_1, u'_2, u'_3)$  ( $u'_i = \pm 1$ ). Each vertex  $(u'_1, u'_2, u'_3)$  has two directed edges starting from this vertex; one is connected to the vertices  $(u'_2, u'_3, +1)$  and the other to  $(u'_2, u'_3, -1)$ . Thus  $G$  consists of 8 vertices and 16 directed edges (two of them are self-loops). For convenience we label each vertex as  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) shown in Fig. 1. A directed path in Fig. 1 implies a feasible input sequence.

<sup>†</sup>In this paper we exclude the case where  $\pm\beta \pm \alpha \pm \gamma + \theta = 0$ , which is a pathological case from the practical point of signal processing.



For example, the directed path  $s_2 \rightarrow s_4 \rightarrow s_5 \rightarrow s_3$  means that

$$[u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5] = [-1, -1, 1, -1, 1, 1]$$

We call the above triplets  $(u'_1, u'_2, u'_3)$  “input triplets” to discriminate them with the triplets  $(y_1, y_2, y_3)$  defined in Sect. 4.1.2. We also call this graph  $G$  “an input transition graph.”

Figure 1 can be drawn uniquely and independently of a specific sequence  $u$ . Let  $s_j = (u'_1, u'_2, u'_3)$  in Fig. 1. Then  $\theta_{0j} = \theta_0(s_j) = u'_1\hat{\beta} + u'_2\hat{\alpha} + u'_3\hat{\gamma} + \theta$ . Thus we can identify each vertex (point)  $s_j$  with the corresponding  $\theta_{0j}$ .

We will next define an S-T-point, an S-point, and a T-point, which play important role to state the stability conditions.

Let  $\Phi(\theta_{0j})$  be a changeable set.

**Definition 2:** If  $\Phi(\theta_{0j})$  satisfies

$$\Phi(\theta_{0j}) \supset \{(y_1, y_2, y_3), (y_1, \bar{y}_2, y_3)\}, \quad (38)$$

then we call this  $\theta_{0j}$  an S-T-point.

If  $\Phi(\theta_{0j})$  satisfies

$$\Phi(\theta_{0j}) \supset \{(y_1, y_2, y_3), (y_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)\}, \quad (39)$$

then we call this  $\theta_{0j}$  an S-point. Similarly, if  $\Phi(\theta_{0j})$  satisfies

$$\Phi(\theta_{0j}) \supset \{(y_1, y_2, y_3), (\bar{y}_1, \bar{y}_2, y_3)\}, \quad (40)$$

then we call this  $\theta_{0j}$  a T-point.

**Remark 1:** The condition (36) corresponds to the S-T-point, while the condition (37) corresponds to coexistence of an S-point and a T-point.

**Definition 3:** In the input transition graph  $G$  we call a directed path starting from an S-point to a T-point an S-T path, say  $P$ . A point on  $P$  being neither S-point nor T-point is called an intermediate point or shortly an I-point.

Then the stability (or instability) conditions in terms of changeable sets can be summarized as follows:

**Theorem 5 [16]:** The 1-D DBCNN  $S$  with an input is unstable under unspecified fixed boundaries if and only if the input transition graph has either an S-T-point or a simple S-T path on which all I-points satisfy the following condition (which we call the “I-condition”).

$$\Phi(\theta_{0j}) = \{(y_1, y_2, y_3), (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)\} \quad (41)$$

Note that Eq. (41) holds with equality.

Since the smallest terms of the  $\alpha$ -terms is  $-\beta + \alpha - \gamma$  and the largest term of the  $\bar{\alpha}$ -terms is  $|\beta| - \alpha + |\gamma|$ , we easily see by referring to the definition of a changeable set that Eq. (41) is essentially equivalent to the condition:

$$\Phi(\theta_{0j}) = \{(-1, 1, -1), (1, -1, 1)\} \quad (42)$$

We exclusively use Eq. (42) rather than Eq. (41).

#### 4.2 Translation of the Conditions in Theorem 5 by means of Connection Coefficients

We should note the following:

**Remark 2:** The existence of  $y_i$  ( $y_i = \pm 1$ ) such that an  $\alpha$ -term  $y_1\beta + \alpha + y_3\gamma$  is less (resp., greater) than  $-\theta_{0j}$  is equivalent to the existence of  $y'_i$  ( $y'_i = \pm 1$ ) such that  $y'_1|\beta| + \alpha + y'_3|\gamma|$  is less (resp., greater) than  $-\theta_{0j}$ . Similarly the existence of  $y_i$  such that  $\bar{\alpha}$ -term  $y_1\beta - \alpha + y_3\gamma$  is greater (resp., less) than  $-\theta_{0j}$  is equivalent to the existence of  $y'_1$  and  $y'_3$  such that  $y'_1|\beta| - \alpha + y'_3|\gamma|$  is greater (resp., less) than  $-\theta_{0j}$ .

Remark 2 means that it suffices for us to describe the  $\alpha$ -terms as  $|\beta| + \alpha + |\gamma|$ ,  $|\beta| + \alpha - |\gamma|$ ,  $-|\beta| + \alpha + |\gamma|$  and  $-|\beta| + \alpha - |\gamma|$ , and the  $\bar{\alpha}$ -terms as  $|\beta| - \alpha + |\gamma|$ ,  $|\beta| - \alpha - |\gamma|$ ,  $-|\beta| - \alpha + |\gamma|$  and  $-|\beta| - \alpha - |\gamma|$ .

The above fact simplifies our subsequent discussion greatly.

##### 4.2.1 Derivation of Lemma 1

By definition (38) an S-T-point exists if and only if there exist  $y_i$  ( $i = 1, 3$ ) and  $\theta_{0j}$  satisfying both

$$y_1\beta + \alpha + y_3\gamma < -\theta_{0j} \quad (43)$$

and

$$y_1\beta - \alpha + y_3\gamma > -\theta_{0j}. \quad (44)$$

By noting Remark 2 and the assumption (4), Eqs. (43) and (44) can be rewritten as

$$y'_1|\beta| + \alpha + y'_3|\gamma| < -\theta_{0j} < y'_1|\beta| - \alpha + y'_3|\gamma| \quad (45)$$

which implies

$$\alpha < 0 \quad (46)$$

Substituting “1” or “-1” into  $y'_1$  and  $y'_3$  in Eq. (45), we have:

$$\alpha + |\beta| + |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \quad (47)$$

$$\alpha + |\beta| - |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha + |\beta| - |\gamma| \quad (48)$$

$$\alpha - |\beta| + |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha - |\beta| + |\gamma| \quad (49)$$

$$\alpha - |\beta| - |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha - |\beta| - |\gamma| \quad (50)$$

Since the intervals of Eqs. (50) and (49) are the origin symmetry of those of Eqs. (47) and (48) respectively and since the central values of the intervals in Eqs. (47)–(50) are respectively  $\frac{1}{2}(|\beta| + |\gamma|)$  ( $> 0$ ),  $\frac{1}{2}(|\beta| - |\gamma|)$  ( $> 0$ ),  $-\frac{1}{2}(|\beta| - |\gamma|)$  ( $< 0$ ),  $-\frac{1}{2}(|\beta| + |\gamma|)$  ( $< 0$ ), we can derive the conditions for an S-T-point to exist by considering only Eqs. (47) and (48).

The intervals of Eqs. (47) and (48) possess the overlap if

$$\alpha + |\beta| + |\gamma| < -\alpha + |\beta| - |\gamma| \quad (51)$$

i.e.,

$$\alpha < -|\gamma|. \quad (52)$$

Considering the above, we can derive the conditions in Lemma 1, which are equivalent to Eqs. (47)–(50).

## 2.2 Derivation of Lemma 2

definition (39) an S-point exists if and only if there exist  $(i = 1, 3)$  and  $\theta_{0j}$  such that

$$y_1\beta + \alpha + y_3\gamma < -\theta_{0j} \quad (53)$$

1

$$y_1\beta - \alpha - y_3\gamma > -\theta_{0j}. \quad (54)$$

By noting Remark 2, Eqs. (53) and (54) can be rewritten as

$$y'_1|\beta| + \alpha + y'_3|\gamma| < -\theta_{0j} < y'_1|\beta| - \alpha - y'_3|\gamma| \quad (55)$$

is implies

$$\alpha + y'_3|\gamma| < 0 \quad (56)$$

substituting “1” or “-1” into  $y'_1$  and  $y'_3$  in Eq. (55), we have:

$$\alpha + |\beta| - |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \quad (57)$$

$$\alpha + |\beta| + |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha + |\beta| - |\gamma| \quad (58)$$

$$\alpha - |\beta| - |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha - |\beta| + |\gamma| \quad (59)$$

$$\alpha - |\beta| + |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha - |\beta| - |\gamma| \quad (60)$$

Since the central values of the intervals of Eqs. (57) and (58) is  $\frac{1}{2}|\beta|$  and since the intervals in Eqs. (59) and (60) are origin symmetry of those of Eqs. (57) and (58), it suffices us to investigate only Eqs. (57) and (58). Note that the interval of Eq. (58) is included completely in that of Eq. (57). we do not need to consider Eq. (58).

Since Eq. (57) is obtained by setting  $y'_3 = -1$ , we have Lemma 2 in Sect. 3.

## 3 Derivation of Lemma 3

definition (40) an T-point exists if and only if there exist  $(i = 1, 3)$  and  $\theta_{0j}$  such that

$$y_1\beta + \alpha + y_3\gamma < -\theta_{0j} \quad (61)$$

1

$$-y_1\beta - \alpha + y_3\gamma > -\theta_{0j}. \quad (62)$$

By noting Remark 2, Eqs. (61) and (62) can be rewritten as

$$y'_1|\beta| + \alpha + y'_3|\gamma| < -\theta_{0j} < -y'_1|\beta| - \alpha + y'_3|\gamma| \quad (63)$$

This implies

$$\alpha + y'_1|\beta| < 0 \quad (64)$$

substituting “1” or “-1” into  $y'_1$  and  $y'_3$  in Eq. (63), we have:

$$\alpha - |\beta| + |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \quad (65)$$

$$\alpha - |\beta| - |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha + |\beta| - |\gamma| \quad (66)$$

$$\alpha + |\beta| + |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha - |\beta| + |\gamma| \quad (67)$$

$$\alpha + |\beta| - |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha - |\beta| - |\gamma| \quad (68)$$

Eq. (66) and Eq. (68) are the origin symmetry of Eq. (65) and Eq. (67), respectively. The central values of Eqs. (65) and (67) are  $\frac{1}{2}|\gamma|$ . So it suffices for us to consider only Eqs. (65) and (67). Note that the interval of Eqs. (67) is included completely in that of Eq. (65). So we do not need to consider Eq. (67).

Since Eq. (65) is obtained by setting  $y'_1 = -1$ , we have Lemma 3 in Sect. 3.

## 4.2.4 Derivation of Lemma 4

First note that Eq. (42) hold in equality. This means that

$$\alpha - |\beta| - |\gamma| < -\theta_{0j} < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \quad (69)$$

and

$$-\alpha + |\beta| - |\gamma| < -\theta_{0j} < \alpha - |\beta| + |\gamma| \quad (70)$$

From these equations we have Lemma 4 in Sect. 3.

## 4.2.5 Derivation of Lemma 6

Under the assumption (22), Case 6) in Sect. 3.2 can be applied for an S-point and Cases 7-8) in Sec 3.3 can be applied for a T-point. Therefore we have Lemma 6 in Sect. 3.

## 4.2.6 Derivation of Lemma 7

In the case  $\alpha < 0$  (i.e., Eq. (25)) an S-T-point, an S-point, and a T-point may exist. There exists an S-T-point for  $\theta_{0j}$  satisfying

$$\alpha - |\beta| + |\gamma| < |\theta_{0j}| < -\alpha + |\beta| + |\gamma| \quad (71)$$

except the case

$$\begin{aligned} -|\gamma| < \alpha < 0 \quad \text{and} \\ -\alpha + |\beta| - |\gamma| < |\theta_{0j}| < \alpha + |\beta| + |\gamma|. \end{aligned} \quad (72)$$

On the other hand for  $\theta_{0j}$  satisfying (72) there exist an S-point and a T-point satisfying Eqs. (16) and (19), respectively. Therefore we have Lemma 7 in Sect. 3.

## 5. Conclusion

We gave the necessary and sufficient conditions for a general 1-D DBCNN to be stable in terms of connection coefficients. There remain future works on the number of equilibrium points and limit cycles.

## Acknowledgment

The authors would like to express their gratitude to the reviewers for helpful suggestions.

This research was supported in part by Core Research for Evolutional Science and Technology (CREST), and Japan Science and Technology Agency (JST), on “Study on Validated Numerical Simulation for Linear Systems,” by the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Specially Promoted Research, no. 17002012,

2005-2010, on "Establishment of Verified Numerical Computation," and by the Grants-in-Aid for Scientific Research (C) no. 16560339 from the Japanese Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology.

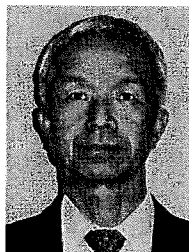
## References

- [1] L.O. Chua and L. Yang, "Cellular neural network: Theory and applications," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.35, no.10, pp.1257-1272, Oct. 1988.
- [2] G. De Sandre, "Stability of 1-D-CNN's with Dirichlet boundary conditions and global propagation dynamics," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.47, no.6, pp.785-792, June 2000.
- [3] R. Shinkai, "Periodic behavior of one dimensional uniform threshold circuit," *IECE Trans. Fundamental (Japanese Edition)*, vol.J59-A, no.6, pp.449-456, 1976.
- [4] S. Wolfram, *Cellular Automata and Complexity*, Addison-Wesley, 1994.
- [5] E. Jen, "Cylindrical cellular automata," *Commun. Math. Phys.*, vol.118, pp.569-590, 1988.
- [6] L.O. Chua and T. Roska, "Stability of a class of nonreciprocal cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.37, no.12, pp.1520-1527, Dec. 1990.
- [7] F. Zou and J.A. Nossek, "Stability of cellular neural networks with opposite-sign templates," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.38, no.6, pp.675-677, June 1991.
- [8] L.O. Chua and C.W. Wu, "On the universe of stable cellular neural networks," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.20, pp.497-517, 1992.
- [9] P.P. Civalleri and M. Gilli, "On the dynamic behaviour of two-cell cellular neural networks," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.21, pp.451-471, 1993.
- [10] M.P. Joy and V. Tavsanoğlu, "A new parameter range for the stability of opposite-sign cellular neural," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.40, no.3, pp.204-207, March 1993.
- [11] F.A. Savaci and J. Vandewalle, "On the stability of cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.40, no.3, pp.213-215, March 1993.
- [12] M. Gilli, "Stability of cellular neural networks and delayed cellular neural networks with nonpositive templates and nonmonotonic output functions," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.41, no.8, pp.518-528, Aug. 1994.
- [13] N. Takahashi and L.O. Chua, "On the complete stability of non-symmetric cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.45, no.7, pp.754-758, July 1998.
- [14] P.P. Civalleli and M. Gilli, "Global dynamic behavior of a 3-cell connected component detector CNN," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.23, no.2, pp.117-135, March/April 1995.
- [15] T. Nishi, H. Sato, and N. Takahashi, "Necessary and sufficient conditions for one-dimensional discrete-time binary cellular neural networks with both A- and B-templates to be globally stable," *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol.1, pp.633-636, May 2002.
- [16] H. Sato, T. Nishi, and N. Takahashi, "Necessary and sufficient conditions for one-dimensional discrete-time binary cellular neural networks with unspecified fixed boundaries to be stable," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E85-A, no.9, pp.2036-2043, Sept. 2002.
- [17] T. Nishi, H. Hara, and N. Takahashi, "Necessary and sufficient conditions for one-dimensional discrete-time binary cellular neural network to be stable—No input case," *Proc. 8th IEEE International Biannual Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications*, Budapest, Hungary, July 2004.
- [18] H. Hara, N. Takahashi, and T. Nishi, "Necessary and sufficient conditions for one-dimensional discrete-time binary cellular neural network with nonsymmetric connections to be stable," *Proc. 47th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, Hiroshima, Japan, July 2004.
- [19] T. Nishi, N. Takahashi, and H. Hara, "Necessary and sufficient conditions for one-dimensional discrete-time autonomous binary cellular neural networks to be stable," Submitted to *IEICE Trans. Fundamentals*.
- [20] T. Roska, "CNN software library ver.7.2," The Computer and Automation Institute of the Hungarian Academy of Sciences, 1998.
- [21] H. Harrer and J.A. Nossek, "Discrete-time cellular neural networks," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.20, no.5, pp.453-467, Sept./Oct. 1992.
- [22] Z.J. Lu and D.R. Liu, "A new synthesis procedure for a class of cellular neural networks with space-invariant cloning template," *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Analog Digit. Signal Process.*, vol.45, no.12, pp.1601-1605, Dec. 1998.
- [23] I. Fajfar and F. Bratkovic, et al., "A rigorous design method for binary cellular neural networks," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.26, no.4, pp.365-373, July-Aug. 1998.
- [24] A. Zarandy, "The art of CNN template design," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.27, no.1, pp.5-23, Jan.-Feb. 1999.
- [25] G. Manganaro and J.P. de Gyvez, "One-dimensional discrete-time CNN with multiplexed template-hardware," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.47, no.5, pp.764-769, May 2000.
- [26] P. Thiran, G. Setti, and M. Hasler, "An approach to information propagation in 1-D cellular neural networks—Part I: Local diffusion," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.45, no.8, pp.777-789, Aug. 1998.



**Tetsuo Nishi** was born in Kitakyushu, Fukuoka, Japan in 1941. He received the B.E., M.E. and D.E. degrees in Electronics Engineering from Kyushu University in 1964, 1966 and 1969, respectively. He had been Professor at the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University from 1983 to 2005 and he moved to Waseda University, Tokyo, in 2005. His research interests include nonlinear circuit theory, graph theory, and distributed circuit analysis. He is the recipient of

the 1985 IEICE Paper Award and the co-recipient of the 1985 Guillemin-Cauer Prize Award of the Circuits and Systems Society of the IEEE. He is Fellow of the IEICE and the IEEE.



**Hajime Hara** received his B.E. and M.E. degrees in 1967 and 1969, respectively, from Yamaguchi University and Ph.D. degree from Kyushu University in 2005. He was an Associate Professor at Department of Electronics and Photonic Systems Engineering of Hiroshima Institute of Technology, Japan, in 1985, and promoted Professor in 2005 at the same university. Presently he is engaged in research on cellular neural networks and image processing.



**Norikazu Takahashi** was born in Kumamoto Prefecture, Japan in 1968. He received the B.E., M.E. and D.E. degrees in Computer Science and Communication Engineering from Kyushu University in 1991, 1993 and 1996, respectively. He is currently an Associate Professor at the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University. His research interests include nonlinear circuit theory and neural networks.

# Global Convergence of Decomposition Learning Methods for Support Vector Machines

Norikazu Takahashi, *Member, IEEE*, and Tetsuo Nishi, *Fellow, IEEE*

**Abstract**—Decomposition methods are well-known techniques for solving quadratic programming (QP) problems arising in support vector machines (SVMs). In each iteration of a decomposition method, a small number of variables are selected and a QP problem with only the selected variables is solved. Since large matrix computations are not required, decomposition methods are applicable to large QP problems. In this paper, we will make a rigorous analysis of the global convergence of general decomposition methods for SVMs. We first introduce a relaxed version of the optimality condition for the QP problems and then prove that a decomposition method reaches a solution satisfying this relaxed optimality condition within a finite number of iterations under a very mild condition on how to select variables.

**Index Terms**—Decomposition method, global convergence, quadratic programming (QP), support vector machines (SVMs), termination.

## I. INTRODUCTION

SUPPORT VECTOR MACHINES (SVMs) have recently attracted great attention in various fields such as pattern recognition, machine learning, neural networks, signal processing, and so on [1]–[4]. Given a set of  $l$  training samples, an SVM has to solve a quadratic programming (QP) problem with  $l$  variables. If the number of training samples are considerably large, the conventional QP solvers cannot be directly applied to SVM learning because large matrix computations are required. To overcome this difficulty, several techniques called decomposition methods have recently been proposed [5]–[8]. A basic strategy commonly used in decomposition methods is to execute two operations repeatedly until some optimality condition is satisfied; one is to select  $q$  variables among  $l$  and the other is to minimize the objective function by updating only the selected  $q$  variables. The set of  $q$  variables selected for updating is called the *working set*. An example of decomposition methods is the sequential minimal optimization (SMO) algorithm proposed by Platt [5], in which only two variables are selected for the working set in each iteration. Another example is SVM<sup>light</sup> [6], the most widely used learning algorithm for

SVMs, in which  $q$ , the size of the working set, can be set to any even number. Since large matrix computations are not required, decomposition methods are useful for SVMs especially when a large number of training samples are given.

For any decomposition method, it is very important to guarantee that the sequence of solutions converges to an optimal solution within a finite number of iterations. Some theoretical results concerning the global convergence of decomposition methods can be found in [9]–[16]. Keerthi and Gilbert [9] analyzed the behavior of the generalized SMO algorithm and gave a proof that the algorithm terminates within a finite number of iterations under a prespecified stopping condition and tolerance<sup>1</sup>. Lin [10] proved that the sequence of solutions obtained by an SMO algorithm converges asymptotically to an optimal solution. Recently, Chen *et al.* [12] carried out a comprehensive study on SMO algorithms and gave several results on asymptotic convergence, finite termination, shrinking and caching, and convergence rate in a general setting on the working set selection. However, the results given in [9]–[12] rely heavily on the fact that only two variables are updated in each iteration, and, therefore, it seems difficult to extend to the general case where  $q$  is greater than two.

Chang *et al.* [13] considered a kind of decomposition method in which  $q$  is not restricted to two, and proved the convergence of the method. However, the working set selection in their method is formulated in a rather special form, and, therefore, the result does not hold for other decomposition methods. Lin [14] investigated the properties of the sequence of solutions obtained by SVM<sup>light</sup> in detail and proved that any limit point of the sequence is an optimal solution. Lin [15] also showed that a class of decomposition methods including SVM<sup>light</sup> stops within a finite number of iterations if a relaxed version of stopping criterion is used. These results are important because the convergence of SVM<sup>light</sup> was guaranteed theoretically for the first time. However, on the other hand, these results require a stronger assumption on the Hessian matrix of the objective function than positive-semidefiniteness [14, Assumption IV.1], except the special case where  $q = 2$  [10]. It is known that this assumption is satisfied if the Gaussian kernel is used and training samples are different from each other, but it is also known that this assumption does not hold true for any kernel function if training samples contain two or more identical data [10]. List and Simon [16] considered a general class of QP problems which includes the one arising in SVMs, and they showed that a decomposition method converges to an optimal solution if its working set selection method satisfies

<sup>1</sup>The authors of the present paper have recently pointed out the incompleteness of their proof and they gave the more rigorous proof [11].

Manuscript received March 9, 2006; revised May 26, 2006. This work was supported in part by the 21st Century Center of Excellence (COE) Program "Reconstruction of Social Infrastructure Related to Information Science and Electrical Engineering."

N. Takahashi is with the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University, Fukuoka 812-8581, Japan (e-mail: norikazu@csce.kyushu-u.ac.jp).

T. Nishi was with the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University, Fukuoka 812-8581, Japan. He is now with the Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Tokyo 169-0072, Japan (e-mail: nishi-t@waseda.jp).

Digital Object Identifier 10.1109/TNN.2006.880584

ee abstract conditions. This result is general in the sense that no specific working set selection method is assumed, but it requires the same assumption on the Hessian matrix of the objective function as [14] and [15].

In this paper, we will present a new convergence proof for general decomposition methods for SVMs. Unlike the aforementioned existing results, we will neither restrict ourselves to a specific working set selection nor assume any condition on the Hessian matrix of the objective function except for positive-semidefiniteness. Instead, we will employ a relaxed version of the Karush–Kuhn–Tucker (KKT) conditions as the optimality condition. The relaxed version contains two positive parameters  $\tau$  and  $\epsilon$ , and approaches the strict KKT conditions as both  $\tau$  and  $\epsilon$  go to zero. By using the global convergence theorem in optimization theory [17], we will prove that the decomposition method stops within a finite number of iterations after finding an optimal solution for any  $\tau$  and  $\epsilon$  if the working set contains at least one pair of indices violating the optimality condition in each iteration. This condition on the working set selection is very mild and thus can be applied to any decomposition methods.

In our convergence proof, the closedness of a point-to-set map [17] plays a central role. It is important to note that the point-to-set map defined for the decomposition method considered in this paper is not closed if either the strict KKT condition or the relaxed version which has been often used so far [6], [9], [11], [15] is employed as the optimality condition. Indeed this is the main difficulty on proving the convergence in earlier works. An extensive discussion is given in [14].

This paper is organized as follows. In Section II, the global convergence theorem for general optimization problems and some related results are reviewed for later discussions. In Section III, the QP problem arising in SVMs, two types of optimality conditions, and the algorithm of general decomposition methods are explained. In Section IV, the relationship between two optimality conditions is first discussed and then convergence theorems for decomposition methods are proved. In Section V, these convergence theorems are applied to some well-known learning algorithms for SVMs. Finally, concluding remarks are given in Section VI.

## II. PRELIMINARIES

First, we will review a fundamental result in optimization theory known as the global convergence theorem [17]. This theorem plays a central role in our global convergence analysis of decomposition methods.

Let us consider the following optimization problem.

**Problem 1:** Find  $\mathbf{x}$  which minimizes the objective function  $f(\mathbf{x})$  under the constraint  $\mathbf{x} \in X$ .

An algorithm for solving Problem 1 can be viewed as an iterative process that generates a sequence  $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=0}^{\infty}$  by

$$\mathbf{x}(k+1) \in \mathbf{A}(\mathbf{x}(k)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

where  $\mathbf{x}(0) \in X$  is a given initial point and  $\mathbf{A}$  is a point-to-set map that assigns to each point in the domain  $X$  a subset of  $X$ . According to this definition, we can state that developing an algorithm for solving Problem 1 is equivalent to determining the point-to-set map  $\mathbf{A}$ . Apparently, the most desirable property

of the map  $\mathbf{A}$  is that the sequence  $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=0}^{\infty}$  generated by (1) converges to an optimal solution of Problem 1 for any initial point  $\mathbf{x}(0) \in X$ .

**Definition 1:** Let  $X$ ,  $\Omega$ , and  $\mathbf{A}$  be a nonempty closed set in  $\mathbb{R}^n$ , a subset of  $X$ , and a point-to-set map from  $X$  to  $X$ , respectively. If a continuous function  $Z$  defined in  $X$  satisfies

$$\text{if } \mathbf{x} \notin \Omega \text{ and } \mathbf{y} \in \mathbf{A}(\mathbf{x}) \text{ then } Z(\mathbf{y}) < Z(\mathbf{x})$$

then  $Z$  is called a *descent function* for  $\Omega$  and  $\mathbf{A}$ .

**Definition 2:** Let  $X$  and  $Y$  be nonempty closed sets in  $\mathbb{R}^n$  and  $\mathbb{R}^m$ , respectively. Let  $\mathbf{A}$  be a point-to-set map from  $X$  to  $Y$ . The map  $\mathbf{A}$  is said to be *closed* at  $\bar{\mathbf{x}}$  if the two following assumptions imply that  $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}})$ :

- 1)  $\mathbf{x}(k) \in X, \forall k$  and  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{x}}$ ;
- 2)  $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{A}(\mathbf{x}(k)), \forall k$  and  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}(k) = \bar{\mathbf{y}}$ .

The map  $\mathbf{A}$  is said to be *closed on  $X$*  if it is closed at each point in  $X$ .

In terms of these definitions, the global convergence theorem can be stated as follows.

**Theorem 1 [17]:** Let  $X$ ,  $\Omega$ , and  $\mathbf{A}$  be a nonempty closed set in  $\mathbb{R}^n$ , a subset of  $X$ , and a point-to-set map from  $X$  to  $X$ , respectively. Let  $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=0}^{\infty}$  be a sequence generated by (1) with  $\mathbf{x}(0) \in X$ . Every convergent subsequence of  $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=0}^{\infty}$  has a limit in  $\Omega$  if the following conditions are satisfied:

- 1) for all  $k$ ,  $\mathbf{x}(k)$  belongs to a compact set  $S \subseteq X$ ;
- 2) there exists a descent function  $Z$  for  $\Omega$  and  $\mathbf{A}$ ;
- 3) the map  $\mathbf{A}$  is closed on  $X \setminus \Omega$ .

Note that  $\Omega$  in Theorem 1 can be any subset of  $X$ . In particular, if  $\Omega$  is set to the set of optimal solutions of Problem 1, Theorem 1 gives a sufficient condition for the sequence  $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=0}^{\infty}$  generated by (1) to converge to an optimal solution. Theorem 1 is hence a very useful tool for proving the global convergence of an algorithm. However, it is difficult in general to develop a map  $\mathbf{A}$  having the global convergence property for the set of optimal solutions. Thus,  $\Omega$  is often set to, for example,  $\{\mathbf{x} | \mathbf{x} \text{ is a local optimal solution}\}$  and  $\{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in X, f(\mathbf{x}) \leq b\}$ , where  $b$  is a constant.

**Lemma 1:** Let  $\mathbf{A} : X \rightarrow Y$  and  $\mathbf{B} : X \rightarrow Y$  be point-to-set maps. If both  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  are closed at  $\mathbf{x}$ , then the map  $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cup \mathbf{B}(\mathbf{x})$  is also closed at  $\mathbf{x}$ .

**Proof:** Let  $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=0}^{\infty}$  be any sequence such that  $\mathbf{x}(k) \in X, \forall k$  and  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}$ . Let  $\{\mathbf{y}(k)\}_{k=0}^{\infty}$  be any sequence such that  $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{C}(\mathbf{x}(k)), \forall k$  and  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}(k) = \mathbf{y}$ . Then, it is obvious that at least one of the two following statements holds:

- 1)  $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{A}(\mathbf{x}(k))$  for infinitely many  $k$ ;
- 2)  $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{B}(\mathbf{x}(k))$  for infinitely many  $k$ .

We will assume without loss of generality that the first case holds true. Let the set of all  $k$  such that  $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{A}(\mathbf{x}(k))$  be denoted by  $K_A$ . Then the sequence  $\{\mathbf{x}(k)\}_{k \in K_A}$  satisfies  $\mathbf{x}(k) \in X, \forall k \in K_A$  and  $\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K_A} \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}$ . Also, the sequence  $\{\mathbf{y}(k)\}_{k \in K_A}$  satisfies  $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{A}(\mathbf{x}(k)), \forall k \in K_A$  and  $\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K_A} \mathbf{y}(k) = \mathbf{y}$ . Since the point-to-set map  $\mathbf{A}$  is closed at  $\mathbf{x}$ , we have  $\mathbf{y} \in \mathbf{A}(\mathbf{x})$  which implies that  $\mathbf{y} \in \mathbf{C}(\mathbf{x})$ . Therefore, the point-to-set map  $\mathbf{C}$  is closed at  $\mathbf{x}$ . ■

A result concerning the closedness of composite maps will also be needed in later discussions.

**Definition 3:** Let  $A : X \rightarrow Y$  and  $B : Y \rightarrow Z$  be point-to-set maps. The composite map  $C = BA$  is defined as the point-to-set map  $C : X \rightarrow Z$  with

$$C(x) = \cup_{y \in A(x)} B(y).$$

**Lemma 2 [17]:** Let  $A : X \rightarrow Y$  and  $B : Y \rightarrow Z$  be point-to-set maps. If  $A$  is closed at  $x$ ,  $B$  is closed on  $A(x)$ , and  $Y$  is compact, then the composite map  $C = BA$  is closed at  $x$ .

### III. DECOMPOSITION METHOD

#### A. SVM Dual Problem

Suppose that we are given a set of  $l$  training samples  $\{(\mathbf{p}_i, d_i)\}_{i=1}^l$  where  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$  is the  $i$ th input pattern and  $d_i \in \{1, -1\}$  represents the class to which  $\mathbf{p}_i$  belongs. The learning of an SVM with the kernel function  $K(\cdot, \cdot)$  leads to the following QP problem (for more details on formulation, see, for example, [1]).

**Problem 2:** Find  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l]^T$  which minimizes the objective function

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l q_{ij} \alpha_i \alpha_j - \sum_{i=1}^l \alpha_i$$

under the constraints

$$\sum_{i=1}^l d_i \alpha_i = 0 \quad (2)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (3)$$

where  $q_{ij} = d_i d_j K(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$  and  $C$  is a user-specified positive constant.

Throughout this paper, we assume that the kernel function  $K(\cdot, \cdot)$  satisfies Mercer's condition [1]. In this case,  $Q = [q_{ij}] \in \mathbb{R}^{l \times l}$  is a positive-semidefinite matrix, and, therefore, Problem 2 is a convex QP problem. Note that the optimal solution of Problem 2 is not necessarily unique because  $W(\alpha)$  is not strictly convex. The feasible region of Problem 2, that is, the set of  $\alpha$  satisfying (2) and (3), is denoted by  $S$  which is apparently a compact set. Also, the set  $\{1, 2, \dots, l\}$  is denoted by  $L$ .

#### B. Optimality Conditions

Since Problem 2 is a convex QP problem, optimal solutions are completely characterized by the KKT conditions [17], that is,  $\alpha \in S$  is an optimal solution of Problem 2 if and only if there exist constants  $\lambda, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$  such that

$$\begin{cases} \partial W(\alpha) / \partial \alpha_i + \lambda d_i - \mu_i + \nu_i = 0 \\ \mu_i \alpha_i = 0 \\ \nu_i (\alpha_i - C) = 0 \\ \mu_i \geq 0 \\ \nu_i \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

for all  $i \in L$ . As shown in [9] and [15], this condition can be rewritten in a more compact form as

$$\min_{i \in I_{\text{up}}(\alpha)} F_i(\alpha) \geq \max_{i \in I_{\text{low}}(\alpha)} F_i(\alpha) \quad (5)$$

where

$$F_i(\alpha) = d_i \left( \sum_{j=1}^l q_{ij} \alpha_j - 1 \right)$$

$$I_{\text{up}}(\alpha) = \{i | \alpha_i < C, d_i = 1\} \cup \{i | \alpha_i > 0, d_i = -1\}$$

$$I_{\text{low}}(\alpha) = \{i | \alpha_i < C, d_i = -1\} \cup \{i | \alpha_i > 0, d_i = 1\}.$$

Let  $\Omega^*$  denote the set of optimal solutions of Problem 2. Then, by using the aforementioned notations, we can express  $\Omega^*$  as follows:

$$\Omega^* = \{\alpha \in S | \min_{i \in I_{\text{up}}(\alpha)} F_i(\alpha) \geq \max_{i \in I_{\text{low}}(\alpha)} F_i(\alpha)\}.$$

In a practical situation, the optimality condition (5) is often relaxed as

$$\min_{i \in I_{\text{up}}(\alpha)} F_i(\alpha) \geq \max_{i \in I_{\text{low}}(\alpha)} F_i(\alpha) - \tau \quad (6)$$

where  $\tau$  is a positive constant [6], [7], [15].

In this paper, on the other hand, we employ neither (5) nor (6) but

$$\min_{i \in I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha)} F_i(\alpha) > \max_{i \in I_{\text{low}}^{\epsilon}(\alpha)} F_i(\alpha) - \tau \quad (7)$$

for the optimality condition, where

$$I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha) = \{i | \alpha_i \leq C - \epsilon, d_i = 1\} \cup \{i | \alpha_i \geq \epsilon, d_i = -1\}$$

$$I_{\text{low}}^{\epsilon}(\alpha) = \{i | \alpha_i \leq C - \epsilon, d_i = -1\} \cup \{i | \alpha_i \geq \epsilon, d_i = 1\}$$

and  $\epsilon$  is any positive constant smaller than  $C/2$ . Usually  $\epsilon$  is set to a sufficiently small positive number. The role of  $I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha)$  and  $I_{\text{low}}^{\epsilon}(\alpha)$  is to consider  $\alpha_i$  which is sufficiently close to 0 ( $C$ , respectively) to be exactly 0 ( $C$ , respectively). This is a technique used in the implementation of SVM<sup>light</sup> algorithm [6] (see the source code<sup>2</sup> of SVM<sup>light</sup> developed by Joachims). In the following, any  $\alpha \in S$  satisfying (7) is said to be a  $(\tau, \epsilon)$ -optimal solution. The set of  $(\tau, \epsilon)$ -optimal solutions is denoted by  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$ , that is

$$\Omega^{(\tau, \epsilon)} = \{\alpha \in S | \min_{i \in I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha)} F_i(\alpha) > \max_{i \in I_{\text{low}}^{\epsilon}(\alpha)} F_i(\alpha) - \tau\}.$$

Also, a pair of indices  $(i, j)$  such that

$$i \in I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha), \quad j \in I_{\text{low}}^{\epsilon}(\alpha), \quad F_i(\alpha) \leq F_j(\alpha) - \tau$$

is called a  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha$ . If a pair  $(i, j)$  is not a  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha$ , the pair is called a  $(\tau, \epsilon)$ -feasible pair at  $\alpha$ . It is obvious from these definitions that  $\alpha \in S$  is a  $(\tau, \epsilon)$ -optimal solution if and only if there is no  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha$ . Properties of the two sets  $\Omega^*$  and  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  as well as the relationship between them will be studied in detail in Section IV.

#### C. Algorithm of Decomposition Method

A basic strategy commonly used in all decomposition methods is to repeat two operations until some optimality

<sup>2</sup>Source code and binaries of SVM<sup>light</sup> are available at <http://svmlight.joachims.org/>

condition is satisfied; one is to select  $q$  variables among  $l$  for the working set and the other is to minimize the objective function  $W(\alpha)$  by updating only the selected  $q$  variables. This is formally expressed as follows.

**Algorithm 1:** Given training samples  $\{(\mathbf{p}_i, d_i)\}_{i=1}^l$ , a kernel function  $K(\cdot, \cdot)$ , a positive constant  $C$ , and an integer  $q(\leq l)$ , execute the following procedures.

- 1) Let  $\alpha(0) = \mathbf{o}$  and  $k = 0$ .
- 2) If  $\alpha = \alpha(k)$  satisfies the optimality condition (7) then stop. Otherwise go to step 3).
- 3) Select the working set  $L_B(k) \subseteq L = \{1, 2, \dots, l\}$  where  $|L_B(k)| \leq q$ .
- 4) Find  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l]^T$  which minimizes the objective function  $W(\alpha)$  under the constraints (2), (3), and  $\alpha_i = \alpha_i(k), \forall i \in L_N(k) = L \setminus L_B(k)$ .
- 5) Set  $\alpha(k+1)$  to an optimal solution of the optimization problem in step 4). Add 1 to  $k$ , and go to step 2).

We will refer to the optimization problem in step 4) as the subproblem in the following. Since the subproblem has at most  $q$  variables, the amount of memory required for Algorithm 1 is linear in  $l$ , while  $l^2$  elements of the matrix  $\mathbf{Q}$  must be stored in memory if Problem 2 is solved at a time. This is the main advantage of decomposition methods. As for computation time, each subproblem can be solved faster as  $q$  decreases. In particular, in the case where  $q = 2$ , subproblems can be solved analytically and, hence, Algorithm 1 can be implemented without QP solvers [5]. However, it should be noted that the number of iterations increases as  $q$  decreases in general. It is apparent that the sequence  $\{\alpha(k)\}_{k=1}^\infty$  generated by Algorithm 1 satisfies two conditions

$$\alpha(k) \in S \quad (8)$$

$$W(\alpha(k+1)) \leq W(\alpha(k)) \quad (9)$$

for all  $k$ . Since the objective function  $W(\cdot)$  is bounded from below in  $S$ , (9) implies that the sequence  $\{W(\alpha(k))\}_{k=0}^\infty$  necessarily converges to a certain value. However, on the other hand, it is not clear whether the sequence  $\{\alpha(k)\}_{k=0}^\infty$  converges to  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  or not.

The optimality condition for the subproblem is expressed in the same form as (5), that is, for given  $L_B(k) \subseteq L$  and  $\alpha(k) \in S$ ,  $\alpha \in S$  is an optimal solution of the subproblem if and only if the following conditions are satisfied:

$$\begin{cases} \min_{i \in I_{\text{up}}(\alpha) \cap L_B(k)} F_i(\alpha) \geq \max_{i \in I_{\text{low}}(\alpha) \cap L_B(k)} F_i(\alpha) \\ \alpha_i = \alpha_i(k) \quad \forall i \in L_N(k) = L \setminus L_B(k). \end{cases}$$

#### IV. GLOBAL CONVERGENCE ANALYSIS OF DECOMPOSITION METHODS

##### A. Properties of $\Omega^*$ and $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$

Before proceeding to the convergence analysis of Algorithm 1, we study properties of  $\Omega^*$  and  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$ .

**Lemma 3:**  $I_{\text{up}}(\alpha) \supseteq I_{\text{up}}^\epsilon(\alpha)$  and  $I_{\text{low}}(\alpha) \supseteq I_{\text{low}}^\epsilon(\alpha)$  for any  $\alpha \in S$  and  $\epsilon \in (0, C/2)$ .

*Proof:* We will prove only the first formula. The second one can be proved similarly. Let  $i$  be any member of  $I_{\text{up}}^\epsilon(\alpha)$ . Then  $\alpha_i$

satisfies  $0 \leq \alpha_i < C - \epsilon$  if  $d_i = 1$  and  $\epsilon < \alpha_i \leq C$  if  $d_i = -1$ . In the former case,  $i$  belongs to  $I_{\text{up}}(\alpha)$  because either  $0 < \alpha_i < C$  or  $\alpha_i = 0$  holds. In the latter case,  $i$  belongs to  $I_{\text{up}}(\alpha)$  because either  $0 < \alpha_i < C$  or  $\alpha_i = C$  holds. Therefore, any member of  $I_{\text{up}}^\epsilon(\alpha)$  belongs to  $I_{\text{up}}(\alpha)$ . This implies  $I_{\text{up}}(\alpha) \supseteq I_{\text{up}}^\epsilon(\alpha)$ . ■

**Proposition 1:**  $\Omega^{(\tau, \epsilon)} \supseteq \Omega^*$  for any  $\tau > 0$  and  $\epsilon \in (0, C/2)$ .

*Proof:* Let  $\alpha$  be any point in  $\Omega^*$ . Then  $\alpha$  satisfies (5). It follows from Lemma 3

$$\begin{aligned} \min_{i \in I_{\text{up}}^\epsilon(\alpha)} F_i(\alpha) &\geq \min_{i \in I_{\text{up}}(\alpha)} F_i(\alpha) \\ \max_{i \in I_{\text{low}}(\alpha)} F_i(\alpha) &\geq \max_{i \in I_{\text{low}}^\epsilon(\alpha)} F_i(\alpha). \end{aligned}$$

From these two inequalities and (5), we have

$$\min_{i \in I_{\text{up}}^\epsilon(\alpha)} F_i(\alpha) \geq \max_{i \in I_{\text{low}}^\epsilon(\alpha)} F_i(\alpha)$$

which implies  $\alpha \in \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ . ■

**Lemma 4:** Let  $\{\alpha(n)\}_{n=0}^\infty$  be any sequence such that  $\alpha(n) \in S, \forall n$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = \bar{\alpha}$ . Then there exist positive integers  $n_1$  and  $n_2$  such that

$$\begin{aligned} I_{\text{up}}(\alpha(n)) &\supseteq I_{\text{up}}(\bar{\alpha}) & \forall n \geq n_1 \\ I_{\text{low}}(\alpha(n)) &\supseteq I_{\text{low}}(\bar{\alpha}) & \forall n \geq n_2. \end{aligned}$$

*Proof:* We will prove only the first formula. The second one can be proved in the same way. Let  $i$  be any member of  $I_{\text{up}}(\bar{\alpha})$ . Then  $\bar{\alpha}_i$  satisfies  $\bar{\alpha}_i < C$  if  $d_i = 1$  and  $\bar{\alpha}_i > 0$  if  $d_i = -1$ . In the former case, since  $\alpha_i(n)$  converges to  $\bar{\alpha}_i$ , there exists a positive integer  $n_1(i)$  such that  $\alpha_i(n) < C, \forall n \geq n_1(i)$  which implies  $i \in I_{\text{up}}(\alpha(n)), \forall n \geq n_1(i)$ . In the latter case, it is shown in the same way that there exists a positive integer  $n_1(i)$  such that  $i \in I_{\text{up}}(\alpha(n)), \forall n \geq n_1(i)$ . Let  $n_1 = \max_{i \in I_{\text{up}}(\bar{\alpha})} n_1(i)$ . Then all members of  $I_{\text{up}}(\bar{\alpha})$  belong to  $I_{\text{up}}(\alpha(n)), \forall n \geq n_1$ . This completes the proof. ■

This lemma was first given by Lin [14, Lemma IV.4]. We have just restated the result in terms of our notations and given a proof for the sake of the reader's convenience.

**Proposition 2:** The set  $\Omega^*$  is closed.

*Proof:* Let  $\{\alpha(n)\}_{n=1}^\infty$  be any sequence such that  $\alpha(n) \in \Omega^*, \forall n$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = \bar{\alpha}$ . It suffices for us to show that  $\bar{\alpha} \in \Omega^*$ . Since  $\alpha(n) \in \Omega^*, \forall n$ , we have

$$\min_{i \in I_{\text{up}}(\alpha(n))} F_i(\alpha(n)) \geq \max_{i \in I_{\text{low}}(\alpha(n))} F_i(\alpha(n)) \quad \forall n.$$

It follows from this inequality and Lemma 4 that there exists a positive integer  $n_1$  such that

$$\min_{i \in I_{\text{up}}(\bar{\alpha})} F_i(\bar{\alpha}) \geq \max_{i \in I_{\text{low}}(\bar{\alpha})} F_i(\bar{\alpha}) \quad \forall n \geq n_1.$$

By letting  $n$  go to infinity, we have

$$\min_{i \in I_{\text{up}}(\bar{\alpha})} F_i(\bar{\alpha}) \geq \max_{i \in I_{\text{low}}(\bar{\alpha})} F_i(\bar{\alpha})$$

which implies  $\bar{\alpha} \in \Omega^*$ . Therefore,  $\Omega^*$  is a closed set. ■



**Lemma 5:** Let  $\{\alpha(n)\}_{n=0}^{\infty}$  be any sequence such that  $\alpha(n) \in S, \forall n$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = \bar{\alpha}$ . Then there exist positive integers  $n_1$  and  $n_2$  such that

$$\begin{aligned} I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha(n)) &\subseteq I_{\text{up}}^{\epsilon}(\bar{\alpha}) & \forall n \geq n_1 \\ I_{\text{low}}^{\epsilon}(\alpha(n)) &\subseteq I_{\text{low}}^{\epsilon}(\bar{\alpha}) & \forall n \geq n_2 \end{aligned}$$

for any  $\epsilon \in (0, C/2)$ .

*Proof:* We will prove only the first formula. The second one can be proved similarly. Let  $i$  be any nonmember of  $I_{\text{up}}^{\epsilon}(\bar{\alpha})$ . Then  $\bar{\alpha}_i$  satisfies  $\bar{\alpha}_i > C - \epsilon$  if  $d_i = 1$  and  $\bar{\alpha}_i < \epsilon$  if  $d_i = -1$ . In the former case, since  $\alpha_i(n)$  converges to  $\bar{\alpha}_i$ , there exists a positive integer  $n_1(i)$  such that  $\alpha_i(n) > C - \epsilon, \forall n \geq n_1(i)$  which implies  $i \notin I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha(n)), \forall n \geq n_1(i)$ . In the latter case, it is shown in the same way that there exists a positive integer  $n_1(i)$  such that  $i \notin I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha(n)), \forall n \geq n_1(i)$ . Let  $n_1 = \max_{i \notin I_{\text{up}}^{\epsilon}(\bar{\alpha})} n_1(i)$ . Then all nonmembers of  $I_{\text{up}}^{\epsilon}(\bar{\alpha})$  do not belong to  $I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha(n)), \forall n \geq n_1$ . This is equivalent to the first formula. ■

**Proposition 3:** The set  $S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$  is closed for any  $\tau > 0$  and  $\epsilon \in (0, C/2)$ .

*Proof:* Let  $\{\alpha(n)\}_{n=1}^{\infty}$  be any sequence such that  $\alpha(n) \in S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}, \forall n$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = \bar{\alpha}$ . Then we have

$$\min_{i \in I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha(n))} F_i(\alpha(n)) \leq \max_{i \in I_{\text{low}}^{\epsilon}(\alpha(n))} F_i(\alpha(n)) - \tau \quad \forall n.$$

It follows from this inequality and Lemma 5 that there exists a positive integer  $n_1$  such that

$$\min_{i \in I_{\text{up}}^{\epsilon}(\bar{\alpha})} F_i(\bar{\alpha}) \leq \max_{i \in I_{\text{low}}^{\epsilon}(\bar{\alpha})} F_i(\bar{\alpha}) - \tau \quad \forall n \geq n_1.$$

By letting  $n$  go to infinity in both sides, we have

$$\min_{i \in I_{\text{up}}^{\epsilon}(\bar{\alpha})} F_i(\bar{\alpha}) \leq \max_{i \in I_{\text{low}}^{\epsilon}(\bar{\alpha})} F_i(\bar{\alpha}) - \tau$$

which means  $\bar{\alpha} \in S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ . Therefore,  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  is a closed set for any  $\tau > 0$  and  $\epsilon \in (0, C/2)$ . ■

**Proposition 4:** The set  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  converges to  $\Omega^*$  as the positive constants  $\tau$  and  $\epsilon$  approach 0.

*Proof:* One can easily see that  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha) = I_{\text{up}}(\alpha)$  and  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} I_{\text{low}}^{\epsilon}(\alpha) = I_{\text{low}}(\alpha)$ , where  $\epsilon \rightarrow 0+$  means  $\epsilon$  approaches 0 from right. Thus, we have

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \Omega^{(\tau, \epsilon)} = \{\alpha \in S \mid \min_{i \in I_{\text{up}}(\alpha)} F_i(\alpha) > \max_{i \in I_{\text{low}}(\alpha)} F_i(\alpha) - \tau\}.$$

Furthermore, if  $\tau$  approaches 0 from right, then the right-hand side of the previous inequality converges to  $\Omega^*$ , that is,  $\lim_{\tau \rightarrow 0+} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \Omega^{(\tau, \epsilon)} = \Omega^*$ . ■

## B. Convergence Proof

Let  $V_q(\alpha)$  be the family of sets  $M \subseteq L$  such that  $|M| \leq q$  and  $M$  contains at least one  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha \in S$ . Then Lemma 6 holds.

**Lemma 6:** Let  $\{\alpha(n)\}_{n=0}^{\infty}$  be any sequence such that  $\alpha(n) \in S, \forall n$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = \bar{\alpha}$ . If  $\bar{\alpha} \in S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$  then

$$V_q(\alpha(n)) \subseteq V_q(\bar{\alpha}) \quad (10)$$

for sufficiently large  $n$ .

*Proof:* Let  $(i, j)$  be any  $(\tau, \epsilon)$ -feasible pair at  $\bar{\alpha}$ . Then at least one of the following three conditions holds:

- 1)  $i \notin I_{\text{up}}^{\epsilon}(\bar{\alpha});$
- 2)  $j \notin I_{\text{low}}^{\epsilon}(\bar{\alpha});$
- 3)  $i \in I_{\text{up}}^{\epsilon}(\bar{\alpha}), j \in I_{\text{low}}^{\epsilon}(\bar{\alpha}), F_i(\bar{\alpha}) > F_j(\bar{\alpha}) - \tau.$

In case 1), it is easily seen from Lemma 5 that  $i \notin I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha(n))$  for sufficiently large  $n$ , which means  $(i, j)$  is a  $(\tau, \epsilon)$ -feasible pair at  $\alpha(n)$  for sufficiently large  $n$ . In case 2), we can draw the same conclusion as case 1). In case 3), it follows from Lemma 5 and the continuity of  $F_i(\cdot)$  that

$$i \in I_{\text{up}}^{\epsilon}(\alpha(n)), \quad j \in I_{\text{low}}^{\epsilon}(\alpha(n)), \quad F_i(\alpha(n)) > F_j(\alpha(n)) - \tau$$

holds for sufficiently large  $n$ . This means  $(i, j)$  is a  $(\tau, \epsilon)$ -feasible pair at  $\alpha(n)$  for sufficiently large  $n$ . Therefore, in all cases, the set of  $(\tau, \epsilon)$ -feasible pairs at  $\bar{\alpha}$  is included in that at  $\alpha(n)$  for sufficiently large  $n$ . Conversely, the set of  $(\tau, \epsilon)$ -violating pairs at  $\alpha(n)$  is included in that at  $\bar{\alpha}$  for sufficiently large  $n$ . Equation (10) is immediately derived from this fact and the definition of  $V_q(\cdot)$ . ■

For any  $M \subseteq L$  and  $\alpha \in S$ , we define the point-to-set map  $\Gamma_M(\alpha)$  as

$$\begin{aligned} \Gamma_M(\alpha) &\triangleq \{y \in S \mid y_i = \alpha_i \quad \forall i \in L \setminus M, \\ &\quad \min_{i \in I_{\text{up}}(y) \cap M} F_i(y) \geq \max_{i \in I_{\text{low}}(y) \cap M} F_i(y)\}. \end{aligned}$$

By using this definition, the set of optimal solutions of the subproblem in step 4) can be expressed as  $\Gamma_{L_B(k)}(\alpha(k))$ . We also define a point-to-set map  $A$  from  $S$  to itself as follows:

$$A(\alpha) = \begin{cases} \cup_{M \in V_q(\alpha)} \Gamma_M(\alpha), & \text{if } \alpha \notin \Omega^{(\tau, \epsilon)} \\ \alpha, & \text{if } \alpha \in \Omega^{(\tau, \epsilon)}. \end{cases} \quad (11)$$

**Lemma 7:** For any  $M \subseteq L$ , the point-to-set map  $\Gamma_M(\alpha)$  is closed on  $S$ .

*Proof:* Let  $\{\alpha(n)\}_{n=0}^{\infty}$  be any sequence such that  $\alpha(n) \in S, \forall n$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = \bar{\alpha} \in S$ . Let  $\{\beta(n)\}_{n=0}^{\infty}$  be any sequence such that  $\beta(n) \in \Gamma_M(\alpha(n)), \forall n$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(n) = \bar{\beta}$ . Then  $\beta(n)$  satisfies

$$\beta_i(n) = \alpha_i(n) \quad \forall i \in L \setminus M \quad (12)$$

$$\min_{i \in I_{\text{up}}(\beta(n)) \cap M} F_i(\beta(n)) \geq \max_{i \in I_{\text{low}}(\beta(n)) \cap M} F_i(\beta(n)) \quad (13)$$

for all  $n$ . It is obvious from (12) that

$$\bar{\beta}_i = \bar{\alpha}_i \quad \forall i \in L \setminus M.$$

Also, by applying the argument used in the proof of Proposition 2 to (13), we have

$$\min_{i \in I_{\text{up}}(\bar{\beta}) \cap M} F_i(\bar{\beta}) \geq \max_{i \in I_{\text{low}}(\bar{\beta}) \cap M} F_i(\bar{\beta}).$$

Therefore,  $\bar{\beta}$  belongs to  $\Gamma_M(\bar{\alpha})$  which implies that  $\Gamma_M(\alpha)$  is closed at  $\bar{\alpha}$ . Since  $\bar{\alpha}$  can be any point in  $S$ , we can conclude that  $\Gamma_M(\alpha)$  is closed on  $S$ . ■

**Lemma 8:** The point-to-set map  $A(\alpha)$  defined by (11) is closed on  $S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ .

*Proof:* Let  $\{\alpha(n)\}_{n=0}^{\infty}$  be any sequence such that  $\alpha(n) \in S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}, \forall n$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = \bar{\alpha} \in S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ . Let  $\{\beta(n)\}_{n=0}^{\infty}$  be any sequence such that  $\beta(n) \in A(\alpha(n)), \forall n$

and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(n) = \bar{\beta}$ . Then it follows from Lemma 6 that there exists a positive integer  $n_1$  such that

$$\beta(n) \in \cup_{M \in V_q(\bar{\alpha})} \Gamma_M(\alpha(n)) \quad \forall n \geq n_1. \quad (14)$$

As shown in Lemma 7, the point-to-set map  $\Gamma_M(\alpha)$  is closed at  $\bar{\alpha}$  for each  $M \in V_q(\bar{\alpha})$ . Moreover, we easily see from Lemma 1 that  $\cup_{M \in V_q(\bar{\alpha})} \Gamma_M(\alpha)$  is closed at  $\bar{\alpha}$ . This result, together with (14), indicates that  $\bar{\beta} \in \cup_{M \in V_q(\bar{\alpha})} \Gamma_M(\bar{\alpha})$ . Therefore,  $A(\alpha)$  is closed at  $\bar{\alpha} \in S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ . Since  $\bar{\alpha}$  can be any point in  $S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ , we can conclude that the point-to-set map  $A(\alpha)$  is closed on  $S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ . ■

**Lemma 9:** The objective function  $W(\alpha)$  of Problem 2 is a descent function for the set of  $(\tau, \epsilon)$ -optimal solutions  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  and the point-to-set map  $A(\alpha)$  defined by (11).

*Proof:* Let  $\beta$  be any point belonging to  $A(\alpha)$ . If  $\alpha \notin \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ , there exists an  $M \in V_q(\alpha)$  such that  $\alpha \notin \Gamma_M(\alpha)$  and  $\beta \in \Gamma_M(\alpha)$ . This implies that  $W(\beta) < W(\alpha)$ . Therefore,  $W(\alpha)$  is a descent function for  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  and  $A(\alpha)$ . ■

Now we are ready for giving the global convergence theorem for Algorithm 1, which is the main result of this paper.

**Theorem 2:** Let  $\{\alpha(k)\}_{k=0}^\infty$  be the sequence generated by Algorithm 1. If the working set  $L_B(k)$  contains at least one  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha(k)$  for all  $k$ , then any convergent subsequence of  $\{\alpha(k)\}_{k=0}^\infty$  has a limit in  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$ .

*Proof:* From the definition of the point-to-set map  $A(\alpha)$  in (11) and the assumption on the working set  $L_B(k)$ , it is apparent that  $\alpha(k+1) \in A(\alpha(k))$  for all  $k$ . The sequence  $\{\alpha(k)\}_{k=0}^\infty$  belongs to  $S$  which is compact. As shown in Lemma 8, the map  $A(\alpha)$  is closed on  $S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ . Also, as shown in Lemma 9, the objective function  $W(\alpha)$  is a descent function for  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  and  $A(\alpha)$ . Therefore, we can conclude from Theorem 1 that any convergent subsequence of  $\{\alpha(k)\}_{k=0}^\infty$  has a limit in  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$ . ■

Theorem 3 is immediately derived from Theorem 2 and Proposition 3.

**Theorem 3:** If the working set  $L_B(k)$  contains at least one  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha(k)$  for all  $k$ , then Algorithm 1 stops at  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  within a finite number of iterations for any  $\tau > 0$  and  $\epsilon \in (0, C/2)$ .

**Remark 1:** According to Proposition 4, we can make  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  as close as we want to  $\Omega^*$  by setting  $\tau$  and  $\epsilon$  to sufficiently small positive numbers. In other words, we can make the limit of the sequence of solutions generated by Algorithm 1 as close as we want to an optimal solution of Problem 2.

**Remark 2:** In the previous discussion, we have assumed that the subproblems can be solved exactly. However, this assumption is not necessarily required. In fact, if it is guaranteed that  $W(\alpha(k+1))$  is less than  $W(\alpha(k))$  as far as  $L_B(k)$  contains at least one  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha(k)$ , then Theorems 2 and 3 still hold. This weaker condition will be useful in practical situations where the subproblems are solved numerically and thus only approximate solutions can be obtained.

**Remark 3:** If we employ (6) instead of (7) for the optimality condition, the global convergence of Algorithm 1 cannot be proved as above because the point-to-set map corresponding to (11) is not closed in this case.

Let us next consider the case where  $(\tau, \epsilon)$ -violating pairs are not always contained in  $L_B(k)$ . Theorem 2 does not hold in this

case because  $W(\alpha)$  is not a descent function for  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  and  $A(\alpha)$  defined by (11). However, if at least one  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair is selected for the working set within a certain period of iterations, Algorithm 1 still has the convergence property. This is formally stated as follows.

**Theorem 4:** Let  $\{\alpha(k)\}_{k=0}^\infty$  be the sequence generated by Algorithm 1. If there exists a positive integer  $m$  such that one of  $m$  sets  $L_B(k), L_B(k+1), \dots, L_B(k+m-1)$  contains at least one  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha(k)$  for all  $k$ , then Algorithm 1 stops at  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  within a finite number of iterations for any  $\tau > 0$  and  $\epsilon \in (0, C/2)$ .

*Proof:* Let us define the point-to-set map  $A^m(\alpha)$  as

$$A^m(\alpha) = \begin{cases} \cup_{(M_1, \dots, M_m) \in V_q^m(\alpha)} \Gamma_{M_m} \cdots \Gamma_{M_1}(\alpha), & \text{if } \alpha \notin \Omega^{(\tau, \epsilon)} \\ \alpha, & \text{if } \alpha \in \Omega^{(\tau, \epsilon)} \end{cases}$$

where  $V_q^m(\alpha)$  is the set of all sequences of the sets  $(M_1, M_2, \dots, M_m)$  such that: 1)  $M_i \subseteq L, i = 1, 2, \dots, m$ , 2)  $|M_i| \leq q, i = 1, 2, \dots, m$ , and 3) at least one  $M_i$  contains at least one  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha$ . Let  $\{\tilde{\alpha}(k)\}_{k=0}^\infty$  be the sequence defined by  $\tilde{\alpha}(k) = \alpha(mk)$ . Then the sequence  $\{\tilde{\alpha}(k)\}_{k=0}^\infty$  satisfies

$$\tilde{\alpha}(k+1) \in A^m(\tilde{\alpha}(k)) \subseteq S \quad \forall k.$$

By applying Lemmas 1, 2, 6, and 7, we can easily show that  $A^m(\alpha)$  is closed on  $S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ . Moreover, it follows from the aforementioned Property 3 of  $V_q^m(\alpha)$  that the objective function  $W(\alpha)$  is a descent function for  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  and  $A^m(\alpha)$ . Thus, by Theorem 1, any convergent subsequence of  $\{\tilde{\alpha}(k)\}_{k=0}^\infty$  has a limit in  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$ . Since  $S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$  is closed for any  $\tau > 0$  and  $\epsilon \in (0, C/2)$ , the convergent subsequence enters  $\Omega^{(\tau, \epsilon)}$  within a finite number of iterations. ■

## V. APPLICATION TO EXISTING LEARNING ALGORITHMS

In this section, we will discuss the global convergence of some existing decomposition methods by applying the results obtained in Section IV.

### A. Generalized SMO Algorithm

Generalized SMO algorithm [9] is a special type of decomposition methods in which the optimality condition is given by (6) and the working set is composed of a pair of indices  $(i, j)$  violating (6) for  $\alpha = \alpha(k)$ , that is  $i \in I_{\text{up}}(\alpha(k)), j \in I_{\text{low}}(\alpha(k)), F_i(\alpha(k)) < F_j(\alpha(k)) - \tau$ .

It has already been proved that this algorithm always stops within a finite number of iterations [9], [11]. We will now show that almost the same result can be derived by using a theorem in Section IV. To do so, we need to modify the generalized SMO algorithm slightly; the optimality condition is given by (7) instead of (6), and the working set is composed of a  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha(k)$  where  $\tau$  and  $\epsilon$  are sufficiently small positive numbers. Then it is easily seen from Theorem 3 that the algorithm stops within a finite number of iterations.

### B. SVM<sup>light</sup>

SVM<sup>light</sup> proposed by Joachims [6] is one of the most widely used decomposition methods for SVMs. The optimality condi-

tion used in SVM<sup>light</sup> is given by (6) and the working set selection is done in a systematic way as follows.

**Algorithm 2:** Given an even number  $q(\leq l)$  and the current solution  $\alpha(k) \in S$ , execute the following procedures.

- 1) Sort  $\{F_i(\alpha(k))\}_{i=1}^l$  in decreasing order. Let the list of subscripts of the sorted list be  $i_1, i_2, \dots, i_l$ .
- 2) Set  $L_B(k) = \emptyset, v = 0, m = 1$ , and  $n = l$ .
- 3) While  $i_m \notin I_{\text{low}}(\alpha(k))$  and  $m \leq l$ , add 1 to  $m$ .
- 4) While  $i_n \notin I_{\text{up}}(\alpha(k))$  and  $n \geq 1$ , subtract 1 from  $n$ .
- 5) If  $m \geq n$ , then stop. Otherwise, add 2 to  $v$  and add  $\{m, n\}$  to the set  $L_B(k)$ .
- 6) If  $v = q$ , then stop. Otherwise, go to step 3).

For more details on the working set selection of SVM<sup>light</sup>, consult [14].

As well as in case of the generalized SMO algorithm, we need to modify both the optimality condition and the working set selection in SVM<sup>light</sup> in order to apply the results in Section IV; the optimality condition is given by (7) instead of (6) and the working set selection is done by Algorithm 3.

**Algorithm 3:** Given an even number  $q(\leq l)$  and the current solution  $\alpha(k) \in S$ , execute the following procedures.

- 1) Sort  $\{F_i(\alpha(k))\}_{i=1}^l$  in decreasing order. Let the list of subscripts of the sorted list be  $i_1, i_2, \dots, i_l$ .
- 2) Set  $L_B(k) = \emptyset, v = 0, m = 1$ , and  $n = l$ .
- 3) While  $i_m \notin I_{\text{low}}^e(\alpha(k))$  and  $m \leq l$ , add 1 to  $m$ .
- 4) While  $i_n \notin I_{\text{up}}^e(\alpha(k))$  and  $n \geq 1$ , subtract 1 from  $n$ .
- 5) If  $m \geq n$ , then stop. Otherwise, add 2 to  $v$  and add  $\{m, n\}$  to the set  $L_B(k)$ .
- 6) If  $v = q$ , then stop. Otherwise, go to step 3).

We will show that  $L_B(k)$  obtained by Algorithm 3 contains at least one  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair if  $\alpha(k) \in S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ . Recall that  $\alpha \in \Omega^{(\tau, \epsilon)}$  if and only if (7) holds. Thus if  $\alpha(k) \in S \setminus \Omega^{(\tau, \epsilon)}$ , the following holds:

$$\min_{i \in I_{\text{up}}^e(\alpha(k))} F_i(\alpha(k)) + \tau \leq \max_{i \in I_{\text{low}}^e(\alpha(k))} F_i(\alpha(k)). \quad (15)$$

Let  $m_1$  be the value of  $m$  at the instance when Algorithm 3 first exits step 3). Then  $i_{m_1} \in I_{\text{low}}^e(\alpha(k))$  and  $F_{i_{m_1}}(\alpha(k)) = \max_{i \in I_{\text{low}}^e(\alpha(k))} F_i(\alpha(k))$ . Also, let  $n_1$  be the value of  $n$  at the instance when Algorithm 3 first exits step 4). Then  $i_{n_1} \in I_{\text{up}}^e(\alpha(k))$  and  $F_{i_{n_1}}(\alpha(k)) = \min_{i \in I_{\text{up}}^e(\alpha(k))} F_i(\alpha(k))$ . It follows from (15) that  $F_{n_1}(\alpha(k)) + \tau \leq F_{m_1}(\alpha(k))$  which implies that  $(n_1, m_1)$  is a  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha(k)$  and that  $m_1 < n_1$ . Therefore,  $L_B(k)$  obtained by Algorithm 3 contains at least one  $(\tau, \epsilon)$ -violating pair at  $\alpha(k)$ .

By applying Theorem 3, we can conclude that SVM<sup>light</sup> with the optimality condition (7) and the working set selection described by Algorithm 3 stops within a finite number of iterations after finding a  $(\tau, \epsilon)$ -optimal solution.

**Remark 4:** In the software package SVM<sup>light</sup>, the optimality condition and the working set selection are not implemented exactly as described in (6) and Algorithm 2, respectively, for practical reason. Difference is in the definition of  $I_{\text{up}}(\alpha)$  and  $I_{\text{low}}(\alpha)$ . In the software, the following definitions are used:

$$I_{\text{up}}(\alpha) = \{i | \alpha_i < C - \epsilon, d_i = 1\} \cup \{i | \alpha_i > \epsilon, d_i = -1\}$$

$$I_{\text{low}}(\alpha) = \{i | \alpha_i < C - \epsilon, d_i = -1\} \cup \{i | \alpha_i > \epsilon, d_i = 1\}$$

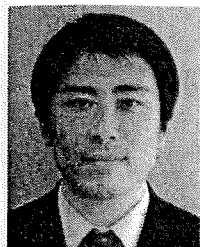
where  $\epsilon$  is a sufficiently small positive number. It is worth noting that these definitions are same as  $I_{\text{up}}^e(\alpha)$  and  $I_{\text{low}}^e(\alpha)$  except for the equal sign. The results of this paper show that the relaxation of the optimality condition has not only practical but also theoretical significance.

## VI. CONCLUDING REMARKS

Global convergence property of decomposition methods for SVMs are studied. We have first introduced a relaxed optimality condition, and then proved that decomposition method stops within a finite number of iterations after finding an optimal solution if the working set selection satisfies a certain condition. We have also shown that the generalized SMO algorithm and SVM<sup>light</sup> satisfy this condition and thus have the global convergence property. Since our new convergence theorems require little restriction on the working set selection method, the authors believe that they can be applied to a wide class of decomposition methods.

## REFERENCES

- [1] V. Vapnik, *Statistical Learning Theory*. New York: Wiley, 1998.
- [2] B. Schölkopf, C. J. C. Burges, and A. J. Smola, Eds., *Advances in Kernel Methods: Support Vector Learning*. Cambridge, MA: MIT Press, 1999.
- [3] N. Cristianini and J. Shawe Taylor, *An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-Based Learning Methods*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2000.
- [4] S. Haykin, *Neural Networks*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999.
- [5] J. C. Platt, "Fast training of support vector machines using sequential minimal optimization," in *Advances in Kernel Methods: Support Vector Machines*, B. Schölkopf, C. Burges, and A. Smola, Eds. Cambridge, MA: MIT Press, 1998.
- [6] T. Joachims, "Making large-scale support vector machine learning practical," in *Advances in Kernel Methods: Support Vector Machines*, B. Schölkopf, C. Burges, and A. Smola, Eds. Cambridge, MA: MIT Press, 1998.
- [7] S. S. Keerthi, S. K. Shevade, C. Bhattacharyya, and K. R. K. Murthy, "Improvements to Platt's SMO algorithm for SVM classifier design," *Neural Comput.*, vol. 13, pp. 637–649, 2001.
- [8] C.-W. Hsu and C.-J. Lin, "A simple decomposition method for support vector machines," *Mach. Learn.*, vol. 46, pp. 291–314, 2002.
- [9] S. S. Keerthi and E. G. Gilbert, "Convergence of a generalized SMO algorithm for SVM classifier design," *Mach. Learn.*, vol. 46, pp. 351–360, 2002.
- [10] C.-J. Lin, "Asymptotic convergence of an SMO algorithm without any assumption," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 13, no. 1, pp. 248–250, Jan. 2002.
- [11] N. Takahashi and T. Nishi, "Rigorous proof of termination of SMO algorithm for support vector machines," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 16, no. 3, pp. 774–776, May 2005.
- [12] P.-H. Chen, R.-E. Fan, and C.-J. Lin, "A study on SMO-type decomposition methods for support vector machines," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 17, no. 4, pp. 893–908, Jul. 2006.
- [13] C.-C. Chang, C.-W. Hsu, and C.-J. Lin, "The analysis of decomposition methods for support vector machines," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 11, no. 4, pp. 1003–1008, Jul. 2000.
- [14] C.-J. Lin, "On the convergence of the decomposition method for support vector machines," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 12, no. 6, pp. 1288–1298, Nov. 2001.
- [15] —, "A formal analysis of stopping criteria of decomposition methods for support vector machines," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 13, no. 5, pp. 1045–1052, Sep. 2002.
- [16] N. List and H. U. Simon, "A general convergence theorem for the decomposition method," in *Proc. 17th Ann. Conf. Learn. Theory*, 2004, pp. 363–377.
- [17] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.



**Norikazu Takahashi** (M'99) received the B.E., M.E., and D.E. degrees in computer science and communication engineering from Kyushu University, Fukuoka, Japan, in 1991, 1993, and 1996, respectively.

From 1996 to 1997, he was a Visiting Scholar at the Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, the University of California, Berkeley. He is currently an Associate Professor at the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University. His research interests include nonlinear circuit theory, neural networks, and optimization theory.



**Tetsuo Nishi** (SM'82–F'96) received the B.E., M.E., and D.E. degrees in electronics engineering from Kyushu University, Fukuoka, Japan, in 1964, 1966, and 1969, respectively.

He had been Professor at the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University, from 1983 to 2005, and he joined Waseda University, Tokyo, Japan, in 2005. His research interests include nonlinear circuit theory, graph theory, distributed circuit analysis, and cellular neural networks (CNNs).

Dr. Nishi is a Fellow of the Institute of Electrical, Information and Communication Engineers (IEICE). He is the recipient of the 1985 IEICE of Japan Paper Award and the corecipient of the 1985 Guillemin–Cauer Prize Award of the Circuits and Systems Society of the IEEE. He served as Associate Editor of the IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS, Chair of Technical Committee of Nonlinear Circuits and Systems of the IEEE Circuits and Systems Society, and Section Chair of IEEE Fukuoka Section, Japan.

## PAPER

# Necessary and Sufficient Conditions for One-Dimensional Discrete-Time Autonomous Binary Cellular Neural Networks to Be Stable

Tetsuo NISHI<sup>†</sup>, Fellow, Norikazu TAKAHASHI<sup>††</sup>, and Hajime HARA<sup>†††a)</sup>, Members

**SUMMARY** We give the necessary and sufficient conditions for a one-dimensional discrete-time autonomous binary cellular neural networks to be stable in the case of fixed boundary. The results are complete generalization of our previous one [16] in which the symmetrical connections were assumed. The conditions are compared with some stability conditions so far known.

**key words:** 1-D DBCNN, CNN, stability, unsymmetric connection

## 1. Introduction

Fundamental concerns of cellular neural networks (CNN) from the theoretical points of view are to find the stability conditions, the number of equilibrium points and limit cycles and the ability for 1-dimensional and 2-dimensional signal processing, etc. [1]–[7]. In spite of long and many researches, however, many of these problems still remain unsolved even for one-dimensional CNN's [8]–[13].

In this paper we study a one-dimensional discrete-time binary cellular neural networks (abbreviated as a 1-D DBCNN) with nonsymmetric connections and without an external input and give the necessary and sufficient conditions for 1-D DBCNNs to be stable in the case of fixed boundaries. Throughout this paper we assume the fixed boundary so far as otherwise stated.

The 1-D DBCNN is resemble to the classical “one-dimensional cellular automaton,” but is different in respect to the transition rule [13]. Indeed the operation of the former is more restrictive than that of the latter and therefore their behaviors differ each other.

The results will be derived from our previous results [12], [13], [16], which gave the necessary and sufficient conditions for the stability of a general 1-D DBCNN. The conditions given in this paper are stated in terms of the connection coefficients, while those in [12], [13] were given in

terms of a changeable set, which is briefly explained later. Reference [16] dealt with the symmetric connection case, while this paper deals with the generalization to nonsymmetric connection case. Though we deal with no external input case (i.e.,  $u = 0$ ) in this paper, we can expect a generalization of the results to the case of  $u \neq 0$ .

The obtained results are compared with several sufficient conditions for stability so far known.

## 2. Preliminaries

The behavior of a 1-D DBCNN denoted by  $S$  can be described by the equation:

$$x(k+1) = \text{sgn}[Ax(k) + Bu + \theta \mathbf{1}] \quad (1)$$

where  $x(k) = [x_1(k), \dots, x_n(k)]^T$  and  $u = [u_1, \dots, u_n]^T$  are a binary state vector at time  $k$  and a binary time-invariant input vector respectively,  $n$  is the dimension of  $S$ ,  $A$  and  $B$  are  $n \times n$  matrices determined by the A- and B-templates,  $\theta$  is a scalar representing the threshold value, and  $\mathbf{1}$  is an  $n$ -dimensional column vector consisting of 1 only. In particular  $x(0)$  is the initial state vector, which can be used as another input data in many applications. We assume the 1-neighborhood DBCNN, so the A-template can be characterized by three parameters denoted by  $\alpha, \beta$ , and  $\gamma$ . Similarly the B-template by  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ , and  $\hat{\gamma}$  (See Eq. (2)). Then Eq. (1) can be rewritten in a scalar form as:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) = & \text{sgn} [\beta x_{i-1}(k) + \alpha x_i(k) + \gamma x_{i+1}(k) \\ & + \hat{\beta} u_{i-1} + \hat{\alpha} u_i + \hat{\gamma} u_{i+1} + \theta], \\ & (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

Since  $S$  can be completely characterized by seven parameters,  $\alpha, \beta, \gamma, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  and  $\theta$ , we can represent  $S$  as  $S = S(\alpha, \beta, \gamma, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \theta)$ . When we calculate  $x_i(k+1)$  by Eq. (2), we have to define the boundary values  $x_0(k)$  and  $x_{n+1}(k)$  for the state vector  $x$  and  $u_0$  and  $u_{n+1}$  for the input vector  $u$ , respectively. For the fixed boundary considered here means that  $x_0(k)$  and  $x_{n+1}(k)$  are constants independent of  $k$ .

In this paper we deal only with no external input case, but we will define the stability for general cases.

**Definition 1:** A 1-D DBCNN  $S$  is said to be stable, if no limit cycle occur for any  $x(0)$ , any  $u$ , any boundary conditions on  $x$  and  $u$ , and any value of the dimension  $n$ . The 1-D DBCNN being not stable are said to be unstable.

Manuscript received April 24, 2006.

Manuscript revised July 28, 2006.

Final manuscript received August 25, 2006.

<sup>†</sup>The author is with the Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Tokyo, 169-0072 Japan.

<sup>††</sup>The author is with the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University, Fukuoka-shi, 812-8581 Japan.

<sup>†††</sup>The author is with the Department of Electronics and Photonic Systems Engineering, Hiroshima Institute of Technology, Hiroshima-shi, 731-5193 Japan.

a) E-mail: hara@cc.it-hiroshima.ac.jp

DOI: 10.1093/ietfec/e89-a.12.3693

### 3. Summary of Previous Results for the Case $u = 0$

#### 3.1 General Stability Conditions in Terms of Changeable Sets

Previously we gave the necessary and sufficient condition for the most general system Eq. (2) to be stable [12], [13], but in this paper we deal only with no input case, i.e.,  $u = 0$  in Eq. (2). Then the system equation can be written as follows:

$$x_i(k+1) = \text{sgn} [\beta x_{i-1}(k) + \alpha x_i(k) + \gamma x_{i+1}(k) + \theta] \quad (3)$$

Eq. (3) can be rewritten in the matrix form as:

$$x(k+1) = \text{sgn} [Wx(k) + \Theta] \quad (4)$$

where

$$W = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \gamma & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

A triplet  $\phi = (x_{i-1}(k), x_i(k), x_{i+1}(k))$  takes one of the following eight patterns;  $(-1, -1, -1)$ ,  $(-1, -1, 1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(-1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, -1)$ ,  $(1, -1, 1)$ ,  $(1, 1, -1)$ , and  $(1, 1, 1)$ . For some of these eight triplets,  $x_i(k+1)$  changes from  $x_i(k)$  and for other triplets  $x_i(k+1)$  is the same as  $x_i(k)$ . We call the former triplets "changeable patterns" and the latter ones "invariant patterns." Note that for simplicity we exclude the rather pathological cases where  $\pm\alpha \pm \beta \pm \gamma + \theta = 0$ . Let  $\Phi$  be a set of all changeable patterns for the system  $S$ .

Let  $y_i (i = 1, 2, \dots)$  denote binary variables and let

$$\bar{y}_i = \begin{cases} 1 & \text{if } y_i = -1 \\ -1 & \text{if } y_i = 1 \end{cases} \quad (7)$$

We can easily verify the following:

**Lemma 1:** If

$$\Phi \supseteq \{(y_1, y_2, y_3), (y_1, \bar{y}_2, y_3)\} \quad (8)$$

holds for some  $y_i$ , then there exists a limit cycle with  $n = 1$ .

**Lemma 2:** If

$$\Phi \supseteq \{(y_1, y_2, y_3), (y_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3), (\bar{y}_1, y_2, \bar{y}_3)\} \quad (9)$$

holds for some  $y_i$ , then there exists a limit cycle with  $n = 2$ .

The important fact is that the converse is true. Thus the

main results in [12], [13] can be simply stated for no input case as follows:

**Theorem 1:** The system  $S$  described by Eq. (3) is unstable if and only if at least one of Eqs. (8) and (9) holds for some  $y_i$ . In other words  $S$  is stable if and only if neither Eqs. (8) nor (9) holds for any set of  $y_i$ .

Though  $\Phi$  is clearly defined, the conditions in Theorem 1 are considerably intractable, since it is not stated in terms of connection coefficients,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , and  $\theta$  (which are also said to be system parameters). The purpose of this paper is to describe the stability condition by these coefficients.

### 4. Stability Conditions in Terms of System Parameters, $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , and $\theta$

#### 4.1 Symmetric Case

We will first state about the symmetric connection case, i.e.,

$$\beta = \gamma \quad (10)$$

In this case the stability conditions in terms of system parameters,  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\theta$ , are given as follows:

**Theorem 2** [16]: Under the condition (10) the system  $S$  described by Eq. (3) is stable if and only if one of the following conditions holds:

$$\text{i) } \alpha \geq |\beta| \quad (11)$$

$$\text{ii) } \alpha \leq |\beta| \text{ and } |\theta| \notin [\max\{0, \alpha\}, -\alpha + 2|\beta|] \quad (12)$$

Proof of this theorem is similar to and somewhat simpler than that of more general case below. So we omit the proof. Note that if  $\alpha < 0$ , then the above condition ii) becomes  $|\theta| \notin [0, |\alpha| + 2|\beta|]$ , which means that  $x_i(k+1) = 1$  or  $x_i(k+1) = -1$  independent of  $x_i(k)$ . So  $\alpha < 0$  in case ii) is a rather trivial condition for stability.

**Example 1 (stable case):** Let  $\alpha = 0.4, \beta = \gamma = 1.0$ , and  $\theta = 0$ . These parameters satisfy the conditions in Theorem 2. In this case the initial state  $x(0) = [-1, 1, -1, 1]$  reaches the equilibrium point  $[1, 1, -1, -1]$  as shown in Table 1:

**Table 1** Example for a stable case ( $n = 4$ ).

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5 (= x_{n+1})$
$k = 0$	1	-1	1	-1	1	-1
$k = 1$	1	1	-1	1	-1	-1
$k = 2$	1	1	1	-1	-1	-1
$k = 3$	1	1	1	-1	-1	-1

For a small value of  $n$  we can exhaustively verify that any  $x(0)$  reaches an equilibrium point, but Theorem 2 says that for any integer  $n > 0$  we have no limit cycle.

**Example 2 (unstable case):** Let  $\alpha = 0.4, \beta = \gamma = 1.0$ , and  $\theta = 0.5$ . These parameters do not satisfy the condition ii) in Theorem 2, and therefore the system can possess a limit cycle for some initial state  $x(0)$  and some boundary conditions. Indeed Table 2 gives an unstable case:

**Table 2** Example for an unstable case ( $n = 4$ ).

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5 (= x_{n+1})$
$k = 0$	-1	-1	-1	1	-1	-1
$k = 1$	-1	-1	1	-1	1	-1
$k = 2$	-1	1	-1	1	-1	-1
$k = 3$	-1	-1	1	-1	1	-1

## 4.2 Nonsymmetric Connection

### 4.2.1 Rewriting Lemmas 1 and 2 for Eq. (3)

In this section we study the case of nonsymmetric connection in detail. In the following we will examine concretely all possible cases of Eqs. (8) and (9) by taking  $y_i = 1$  or  $y_i = -1$ . Since we want to obtain the necessary and sufficient conditions, it suffices to consider the equality cases in Eqs. (8) and (9) instead of  $\supseteq$ .

Equation (8) implies Cases 1–4 below.

**Case 1:** By setting  $y_1 = y_2 = y_3 = 1$  in Eq. (8), we have

$$\Phi = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1)\} \quad (13)$$

Since these triplets are changeable patterns, we have the following inequalities:

$$\begin{aligned} \beta \times 1 + \alpha \times 1 + \gamma \times 1 + \theta &< 0 \\ \beta \times 1 + \alpha \times (-1) + \gamma \times 1 + \theta &> 0 \end{aligned} \quad (14)$$

from which we have:

$$\begin{aligned} \alpha &< -(\beta + \gamma + \theta) \text{ and } \alpha < \beta + \gamma + \theta \\ \text{i.e., } \alpha &< -|\beta + \gamma + \theta| \leq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

**Case 2:** By setting  $y_1 = y_2 = 1, y_3 = -1$  in Eq. (8), we have

$$\Phi = \{(1, 1, -1), (1, -1, -1)\} \quad (16)$$

In this case we have:

$$\begin{aligned} \beta \times 1 + \alpha \times 1 + \gamma \times (-1) + \theta &< 0 \\ \beta \times 1 + \alpha \times (-1) + \gamma \times (-1) + \theta &> 0 \end{aligned} \quad (17)$$

from which we have:

$$\begin{aligned} \alpha &< -(\beta - \gamma + \theta) \text{ and } \alpha < \beta - \gamma + \theta \\ \text{i.e., } \alpha &< -|\beta - \gamma + \theta| \leq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

**Case 3:** Let  $y_1 = -1$  and  $y_2 = y_3 = 1$ . Then

$$\Phi = \{(-1, 1, 1), (-1, -1, 1)\} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \beta \times (-1) + \alpha \times 1 + \gamma \times 1 + \theta &< 0 \\ \beta \times (-1) + \alpha \times (-1) + \gamma \times 1 + \theta &> 0 \end{aligned} \quad (20)$$

from which we have:

$$\begin{aligned} \alpha &< \beta - \gamma - \theta \text{ and } \alpha < -(\beta - \gamma - \theta) \\ \text{i.e., } \alpha &< -|\beta - \gamma - \theta| \leq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

**Case 4:** Let  $y_1 = y_3 = -1$  and  $y_2 = 1$ . Then

$$\Phi = \{(-1, 1, -1), (-1, -1, -1)\} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \beta \times (-1) + \alpha \times 1 + \gamma \times (-1) + \theta &< 0 \\ \beta \times (-1) + \alpha \times (-1) + \gamma \times (-1) + \theta &> 0 \end{aligned} \quad (23)$$

from which we have:

$$\alpha < -|\beta + \gamma - \theta| \leq 0 \quad (24)$$

In a similar way we can derive the conditions from Eq. (9) as in Cases 5–12 below:

**Case 5:**

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1)\} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha < -\beta - \gamma - \theta, \quad \alpha < \beta - \gamma + \theta, \\ \alpha < \beta + \gamma - \theta \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

**Case 6:**

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha < -\beta + \gamma - \theta, \quad \alpha < \beta + \gamma + \theta, \\ \alpha < \beta - \gamma - \theta \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

**Case 7:**

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(-1, 1, 1), (-1, -1, -1), (1, 1, -1)\} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta - \gamma - \theta, \quad \alpha < -\beta - \gamma + \theta, \\ \alpha < -\beta + \gamma - \theta \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

**Case 8:**

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (1, 1, 1)\} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta + \gamma - \theta, \quad \alpha < -\beta + \gamma + \theta, \\ \alpha < -\beta - \gamma - \theta \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

**Case 9:**

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(1, -1, -1), (1, 1, 1), (-1, -1, 1)\} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha < -\beta - \gamma - \theta, \quad \alpha < \beta - \gamma + \theta \\ \alpha < -\beta + \gamma + \theta \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

**Case 10:**

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(1, -1, 1), (1, 1, -1), (-1, -1, -1)\} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha < -\beta + \gamma - \theta, \quad \alpha < \beta + \gamma + \theta, \\ \alpha < -\beta - \gamma + \theta \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

**Case 11:**

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(-1, -1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1)\} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta - \gamma - \theta, \quad \alpha < -\beta - \gamma + \theta, \\ \alpha < \beta + \gamma + \theta \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

**Case 12:**

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1)\} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta + \gamma - \theta, \quad \alpha < -\beta + \gamma + \theta, \\ \alpha < \beta - \gamma + \theta \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

From these inequalities we have:

**Theorem 3:** The system  $S$  described by Eq. (3) are unstable if and only if at least one of Eqs. (15), (18), (21), (24), and (25)–(32) holds.

#### 4.3 Summary of the Above Conditions for Nonsymmetric Case

Carrying out very careful and tedious calculations for these twelve conditions, we can compactly summarize them as follows:

**Theorem 4:** Without loss of generality we assume that

$$|\beta| \geq |\gamma| \quad (33)$$

Then the system  $S$  described by Eq. (3) is stable if and only if one of the following conditions i), ii) and iii) holds:

- i)  $\alpha \geq |\gamma|$
- ii)  $0 \leq \alpha < |\gamma|$  and either one of the following conditions ii-1) and ii-2) holds.
  - ii-1)  $|\theta| > -|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$
  - ii-2)  $|\theta| < |\alpha| + |\beta| - |\gamma|$
- iii)  $\alpha < 0$  and either one of the following conditions iii-1) and iii-2) holds.
  - iii-1)  $|\theta| > |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$
  - iii-2)  $|\theta| < -|\alpha| + |\beta| - |\gamma|$  and  $|\beta| > |\alpha| + |\gamma|$

Conversely we have:

**Theorem 5:** Under the assumption in Eq. (33) the system  $S$  in Eq. (3) is unstable if and only if one of the following conditions iv) and v) holds:

- iv)  $0 \leq \alpha \leq |\gamma|$  and
 
$$|\alpha| + |\beta| - |\gamma| < |\theta| < -|\alpha| + |\beta| + |\gamma|.$$
- v)  $\alpha < 0$  and
 
$$-|\alpha| + |\beta| - |\gamma| < |\theta| < |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$$

**Remark 1:** We can easily verify that when

$$|\beta| = |\gamma| \quad (34)$$

holds, the conditions in Theorem 4 coincide with those in Theorem 2.

**Example 3:** Let  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $\gamma = -0.5$ , and  $\theta = 1.0$ . Then these parameters satisfy the condition iv) in Theorem 5. So we can find a limit cycle as shown in Table 3:

**Table 3** Example for an unstable case ( $n = 4$ ).

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5 (= x_{n+1})$
$k = 0$	-1	-1	-1	1	1	-1
$k = 1$	-1	1	-1	-1	1	-1
$k = 2$	-1	1	1	-1	1	-1
$k = 3$	-1	-1	1	1	1	-1
$k = 4$	-1	-1	-1	1	1	-1

#### 4.4 Comparison with the Previous Results

As a sufficient condition for Eq. (4) to be stable, the following theorem is well known:

**Theorem 6:** In general the system described by the equation:

$$x(k+1) = \text{sgn} [\hat{W}x(k) + \hat{\Theta}] \quad (35)$$

$$\hat{W} : N \times N \text{ symmetrix matrix} \quad (36)$$

is stable independently of the vector  $\hat{\Theta}$  if  $\hat{W}$  is a positive definite matrix.

**Lemma 3:** Let  $D$  be a positive diagonal matrix. Then

$$x(k+1) = \text{sgn} [D(\hat{W}x(k) + \hat{\Theta})] \quad (37)$$

apparently has the same behavior as Eq. (35).

From Theorem 6 and Lemma 3 we have:

**Lemma 4:** Suppose that  $D\hat{W}$  is positive definite for some appropriate positive diagonal matrix  $D$ . Then the equation described by Eq. (35) is stable.

We will apply Lemma 4 to Eq. (3). If  $D\hat{W}$  is symmetric, then

$$\beta\gamma > 0 \quad (38)$$

has to be satisfied. Let

$$\xi = \frac{\gamma}{\beta} (> 0) \quad (39)$$

On the assumption (38) we can choose  $D$  as follows:

$$D = \text{diag} [1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{N-1}] \quad (40)$$

In the case of Eq. (38), the connection matrix  $D\hat{W}$  is as follows:

$$D\hat{W} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & \alpha\xi & \gamma\xi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma\xi & \alpha\xi^2 & \gamma\xi^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\xi^2 & \alpha\xi^3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \gamma\xi^{N-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \gamma\xi^{N-2} & \alpha\xi^{N-1} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Thus  $D\hat{W}$  is symmetric. Define  $D'$  as:

$$D' = \text{diag} [1, \sqrt{\xi}, \sqrt{\xi^2}, \sqrt{\xi^3}, \dots, \sqrt{\xi^{(N-2)/2}}] \quad (42)$$

Then  $D'D\hat{W}D'$  is the same tridiagonal symmetric matrix (5) except that both  $\beta$  and  $\gamma$  replaced by  $\sqrt{\gamma/\beta}$ . Note that in general the eigenvalues of the matrix  $W$  in Eq. (5) is explicitly given as [14], [15]:

$$\lambda_l = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma} \cos\left(\frac{l\pi}{N+1}\right), \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (43)$$

We therefore see that  $D'D\hat{W}D'$  as well as  $D\hat{W}$  is positive definite if and only if

$$\alpha \geq 2\sqrt{\beta\gamma} \quad (44)$$

Comparing Eq. (44) with the conditions in Theorem 4, we see that Theorem 6 and Lemma 3 imply only a part of condition i) and therefore give very weak conditions compared with Theorem 4.

In the case  $\beta\gamma < 0$  we cannot apply Theorem 6. For a nonsymmetric system matrix instead of Eq. (36) we have the



following theorem:

**Theorem 7:** The system in Eq. (35) is stable if

$$w_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |w_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (45)$$

independent of  $\Theta$ .

When we apply Theorem 7 to Eq. (35), we have the stability condition:

$$\alpha \geq |\beta| + |\gamma|, \quad (46)$$

which is weaker than the condition i) in Theorem 4.

**Remark 2:** According to a generalization [17] of Eq. (45), which one of the authors recently derived, we can derive the same stability condition as the condition i) in Theorem 4.

## 5. Conclusion

We gave the necessary and sufficient conditions for the stability of 1-D DBCNN with nonsymmetric connections in terms of connection coefficients.

Though in this paper we focus on the study of stability problem, possible signal processing by a system is more important from the practical points of view and is the final aim of our research. Possible kinds of signal processing were examined exhaustively (but not theoretically) in case of one-dimensional and one-neighborhood CNNs and we learned that they are limited to nine kinds of operations only. Some of them are "detection of isolated points," "removal of isolated points," "detection of edge points of a block signal," "edge emphasis," "detection of connected component." So in order to develop more variety of signal processing we have to utilize two-neighborhood CNNs, which are more promising for future CNNs [2], [10]. Even in two-neighborhood CNN case the stability problem is one of the fundamental problems.

## Acknowledgment

The authors would like to express their gratitude to the reviewers for helpful suggestions.

This research was supported in part by Core Research for Evolutional Science and Technology (CREST), and Japan Science and Technology Agency (JST) and by the Grants-in-Aid for Scientific Research (C) no. 16560339 from the Japanese Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology.

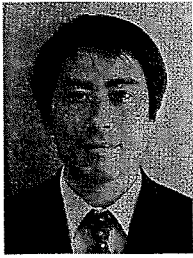
## References

- [1] L.O. Chua and L. Yang, "Cellular neural network: Theory and applications," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.35, no.10, pp.1257–1272, Oct. 1988 and *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.35, no.10, pp.1273–1290, Oct. 1988.
- [2] T. Roska, "CNN software library ver.7.2," The Computer and Automation Institute of the Hungarian Academy of Sciences, 1998.
- [3] A. Zangrandy, "The art of CNN template design," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.27, no.1, pp.5–23, Jan./Feb. 1999.
- [4] Z.J. Lu and D.R. Liu, "A new synthesis procedure for a class of cellular neural networks with space-invariant cloning template," *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Analog Digit. Signal Process.*, vol.45, no.12, pp.1601–1605, Dec. 1998.
- [5] I. Fajfar, F. Bratkovic, T. Tuma, and J. Puhon, "A rigorous design method for binary cellular neural networks," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.26, no.4, pp.365–373, July/Aug. 1998.
- [6] M. Gilli "Stability of cellular neural networks and delayed cellular neural networks with nonpositive templates and nonmonotonic output functions," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.41, no.8, pp.518–528, Aug. 1994.
- [7] H. Harter and J.A. Nossek, "Discrete-time cellular neural networks," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.20, no.5, pp.453–467, Sept./Oct. 1992.
- [8] G. De Sandre, "Stability of 1-D-CNN's with Dirichlet boundary conditions and global propagation dynamics," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.47, no.6, pp.785–792, June 2000.
- [9] G. Manganaro and J.P. de Gyvez, "One-dimensional discrete-time CNN with multiplexed template-hardware," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.47, no.5, pp.764–769, May 2000.
- [10] P. Thiran, G. Setti, and M. Hasler, "An approach to information propagation in 1-D cellular neural networks - Part I: Local diffusion," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.45, no.8, pp.777–789, Aug. 1998.
- [11] P.P. Civalleli and M. Gilli, "Global dynamic behavior of a 3-cell connected component detector CNN," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.23, no.2, pp.117–135, March/April 1995.
- [12] T. Nishi, H. Sato, and N. Takahashi, "Necessary and sufficient conditions for one-dimensional discrete-time binary cellular neural networks with both A- and B-templates to be globally stable," *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol.1, pp.633–636, May 2002.
- [13] H. Sato, T. Nishi, and N. Takahashi, "Necessary and sufficient conditions for one-dimensional discrete-time binary cellular neural networks with unspecified fixed boundaries to be stable," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E85-A, no.9, pp.2036–2043, Sept. 2002.
- [14] W.F. Trench, "On the eigenvalue problem for Toeplitz band matrices," *Linear Algebr. Appl.*, vol.64, pp.199–214, 1985.
- [15] N. Takahashi and T. Nishi, "On the eigenvalue problem for the connection matrix of space-invariant cellular neural networks," *Proc. 1998 Int. Symp. on Nonlinear Theory and its Application (NOLTA'98)*, pp.931–934, 1998.
- [16] T. Nishi, H. Hara, and N. Takahashi, "Necessary and sufficient conditions for one-dimensional discrete-time binary cellular neural network to be stable—No input case," *Proc. 8th IEEE International Biannual Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications*, pp.453–458, Budapest, Hungary, July 2004.
- [17] N. Takahashi, private communication.

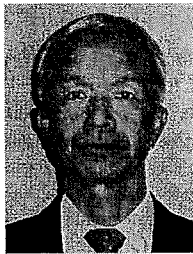


**Tetsuo Nishi** was born in Kitakyushu, Fukuoka, Japan in 1941. He received the B.E., M.E. and D.E. degrees in Electronics Engineering from Kyushu University in 1964, 1966 and 1969, respectively. He has been Professor at the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University from 1983 to 2005 and he moved to Waseda University, Tokyo, in 2005. His research interests include nonlinear circuit theory, graph theory, and distributed circuit analysis. He is the recipient of

the 1985 IEICE Paper Award and the co-recipient of the 1985 Guillemin-Cauer Prize Award of the Circuits and Systems Society of the IEEE. He is Fellow of the IEEE.



**Norikazu Takahashi** was born in Kumamoto Prefecture, Japan in 1968. He received the B.E., M.E. and D.E. degrees in Computer Science and Communication Engineering from Kyushu University in 1991, 1993 and 1996, respectively. He is currently an Associate Professor at the Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University. His research interests include nonlinear circuit theory and neural networks.



**Hajime Hara** received his B.E. and M.E. degrees in 1967 and 1969, respectively, from Yamaguchi University and Ph.D. degree from Kyushu University in 2005. He was an Associate Professor at Department of Electronics and Photonic Systems Engineering of Hiroshima Institute of Technology, Japan, since 1985, and promoted Professor in 2005 at the same university. Presently he has engaged in research on cellular neural networks and image processing.